MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

13. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

13. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

Inhaltsverzeichnis

Seite

Apt, F., Die Tangentenlosigkeit der von Kochschen Kurve 217

Bach, R., Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. A. Das Feld in der Umgebung eines langsam rotierenden kugelähnlichen Körpers von beliebiger Masse in 1. und 2. Annäherung 119

Bach, R., Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. B. Explizite Aufstellung statischer axialsymmetrischer Felder. Mit einem Zusatz über das statische Zweikörperproblem. Von H. Weyl 134

Bell, E. T., Arithmetical equivalents for a remarkable identity between theta functions 146

Fraenkel, A., Axiomatische Begründung der transfiniten Kardinalzahlen. I. (Herrn K. Hensel zum sechzigsten Geburtstag) 153

Hamburger, H., Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion. (Dritte Mitteilung.) Die Funktionalgleichung der L-Reihen 283

Horn, J., Zur Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen 263

Jolles, St., Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz und die beiden Arten windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen 223

Jung, H. W. E., Kurven auf algebraischen Flächen 189

Jung, H. W. E., Ebene Schnitte und Berührungskegel einer algebraischen Fläche 202

Lichtenstein, L., Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Dritte Abhandlung. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper . . . 82

Liebmann, H., Zwei charakteristische Eigenschaften der Flächen konstanten Krümmungsmaßes 10

Mathematische Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft 312

Nevanlinna, R., Kriterien für die Randwerte beschränkter Funktionen . . . 1

Rademacher, H., Über eine funktionale Ungleichung in der Theorie der konvexen Körper 18

Schouten, J. A., Über die verschiedenen Arten der Übertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können 56

Szegö, G., Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen 28

Kriterien für die Randwerte beschränkter Funktionen.

Von

Rolf Nevanlinna in Helsingfors.

Das sogenannte Schwarzsche Lemma ist nach vielen Richtungen verallgemeinert und erweitert worden. In der letzten Zeit hat Herr Julia[1]) eine neue Erweiterung desselben gegeben, indem er annimmt, daß ein Randwert der betreffenden beschränkten Funktion vorgeschrieben ist.

Im Anschluß an die Abhandlung des Herrn Julia stellen wir uns hier die allgemeinere Aufgabe, die Eigenschaften einer beschränkten Funktion zu untersuchen, wenn mehrere Randwerte derselben vorgeschrieben sind. Wir erhalten, außer notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die gegebenen Werte, eine Verallgemeinerung des eben genannten Juliaschen Satzes. Unsere Ergebnisse ergänzen auch einige von Herrn Pick[2]) und uns[3]) gefundene Sätze über die Wertzuordnungen sowie die bekannten Carathéodoryschen Sätze über die Koeffizienten der Taylorschen Entwicklung beschränkter Funktionen im Innern des gegebenen Bereiches.

1. Es sei

$$z = f(x) \tag{1}$$

eine in der Halbebene $J(x) > 0$ definierte reguläre analytische Funktion, die der Bedingung genügt:

$$J(f(x)) \geqq 0 \quad \text{für} \quad J(x) > 0. \tag{2}$$

[1]) G. Julia, Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz, Acta Mathematica, 2:4 (1920), S. 349—355.

[2]) G. Pick, Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden, Math. Annalen, 77 (1915), S. 7—23; Über beschränkte Funktionen mit vorgeschriebenen Wertzuordnungen, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Ser. A, Tom. XV, Nr. 3 (1920), S. 1—17.

[3]) R. Nevanlinna, Über beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Ser. A. Tom. XIII, Nr. 1 (1919), S. 1—71.

Weiter wird angenommen, daß diese Funktion in n auf der reellen Achse liegenden Punkten

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{3}$$

regulär ist und die ebenfalls *reellen* Werte

$$z_1, z_2, \ldots, z_n \tag{4}$$

annimmt[4]), und daß ihre Ableitung in diesen Punkten die Werte

$$f'(x_\nu) = z'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

erhält.

Wir fragen dann: Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Werte (3), (4) und (5), damit eine Funktion der bezeichneten Art existiert, und welches ist der allgemeine Ausdruck für eine solche Funktion? Zur Lösung dieses Problems schlagen wir ein Rekursionsverfahren ein, das uns in der oben zitierten Arbeit bei einer verwandten Aufgabe zum Ziele geführt hat.

2. Nehmen wir also an, daß die Funktion (1) der charakterisierten Art ist. Dann folgt sofort, daß ihre Ableitung im Punkte x_1 *reell* und *nichtnegativ* sein muß:

$$f'(x_1) = z'_1 \geqq 0, \tag{6}$$

denn sonst könnte die Bedingung (2) in der Umgebung des Punktes x_1 nicht erfüllt sein. Ebenso sieht man, daß das Gleichheitszeichen in (6) nur dann eintreten kann, wenn sich die Funktion auf die Konstante z_1 reduziert; es ist dann

$$\begin{cases} z_1 = z_2 = \ldots = z_n, \\ z'_1 = z'_2 = \ldots = z'_n = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Wenn $z'_1 > 0$ ist, so bilden wir mit Herrn Julia die Halbebene $J(z) \geqq 0$ auf sich selbst so konform ab, daß der Punkt z_1 in den Unendlichkeitspunkt übergeht. Wir werden so zu der Funktion

$$-\frac{1}{z - z_1} = -\frac{1}{z'_1 (x - x_1)} + c_0 + c_1 (x - x_1) + \ldots \qquad \left(c_0 = \frac{1}{2} \frac{f''(x_1)}{(f'(x_1))^2}\right) \tag{8}$$

geführt, die offenbar wieder die Eigenschaft (2) besitzt. Wir werden zeigen, daß dieselbe Eigenschaft auch der Funktion

$$f_2(x) = \frac{1}{t_1 (x - x_1)} - \frac{1}{f(x) - z_1} \tag{9}$$

zukommt, wo wir $z'_1 = t_1$ gesetzt haben, um für das folgende eine be-

[4]) Wir nehmen zunächst an, daß sowohl die Werte (3) als (4) untereinander verschieden sind.

quemere Bezeichnung zu bekommen. Der imaginäre Teil des zweiten Gliedes auf der rechten Seite in (9) ist nämlich für $J(x) > 0$ positiv, während das erste Glied auf der reellen Achse reell ist und für $x = \infty$ verschwindet. Bezeichnet ε eine beliebig kleine positive Größe, so genügt also die in der Halbebene $J(x) > 0$ reguläre harmonische Funktion $J(f_2(x))$ der Ungleichung

$$J(f_2(x)) > -\varepsilon \tag{10}$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Randpunktes (auch des Punktes $x = \infty$), mit Ausnahme des Punktes $x = x_1$. In diesem Punkte ist aber $f_2(x)$ regulär und somit $J(f_2(x))$ in der Umgebung desselben beschränkt. Indem man die Halbebene $J(x) \geqq 0$ auf einen Kreis abbildet, schließt man hieraus vermittels einer wohlbekannten Anwendung des Poissonschen Integrals, daß die Ungleichung

$$J(f_2(x)) \geqq 0 \tag{11}$$

in der ganzen Halbebene $J(x) > 0$ besteht, wobei das Gleichheitszeichen nur dann eintritt, wenn $J(f_2(x))$ identisch verschwindet, und $f_2(x)$ sich also auf eine reelle Konstante reduziert.

In den Punkten

$$x_2, x_3, \ldots, x_n \tag{12}$$

ist die Funktion (9) regulär und nimmt die reellen Werte

$$f_2(x_\nu) = \frac{1}{t_1(x_\nu - x_1)} - \frac{1}{z_\nu - z_1} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n) \tag{13}$$

an. Ihre erste Ableitung hat in diesen Punkten die Werte

$$f_2'(x_\nu) = \frac{z_\nu'}{(z_\nu - z_1)^2} - \frac{1}{t_1(x_\nu - x_1)^2} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n). \tag{14}$$

Wenn umgekehrt $f_2(x)$ eine Funktion ist, die der Bedingung (2) genügt und die Gleichungen (13) und (14) befriedigt, so besitzt die durch die Relation (9) bestimmte Funktion

$$f(x) = z_1 + \frac{1}{\frac{1}{t_1(x - x_1)} - f_2(x)} \tag{15}$$

die geforderten Eigenschaften. Sie ist zunächst in der Halbebene $J(x) > 0$ regulär und ihr imaginärer Teil positiv, weil das erste Glied ihres Ausdruckes reell ist und der Nenner des zweiten Gliedes offenbar einen negativen imaginären Teil besitzt. Ferner bestätigt man unmittelbar, daß die Werte der Funktion und ihrer Ableitung in den Punkten (3) mit den gegebenen Werten (4) bzw. (5) übereinstimmen. Wir sehen also:

Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Funktion der verlangten Art existiert, ist, daß entweder die Gleichungen (7) bestehen, in welchem Fall die Funktion eine reelle Konstante ist, oder $t_1 = z_1' > 0$ ist und eine Funktion $f_2(x)$ existiert, die der Bedingung (2) genügt und in den $(n-1)$ Punkten (12) die Werte (13) mit den Ableitungswerten (14) annimmt.

3. Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes erhalten wir eine Folge von Funktionen

$$f_1(x) = f(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x), \ \ldots,$$

die durch die Rekursionsformel

$$(16) \qquad \begin{cases} f_k(x) = \dfrac{1}{t_{k-1}(x - x_{k-1})} - \dfrac{1}{f_{k-1}(x) - z_{k-1}^{(k-1)}} & (k = 2, \ldots), \\ t_{k-1} = f_{k-1}'(x_{k-1}), \quad z_{k-1}^{(k-1)} = f_{k-1}(x_{k-1}) \end{cases}$$

bestimmt sind. Die Werte

$$(17) \qquad f_k(x_k) = z_k^{(k)}, \quad f_k(x_{k+1}), \ \ldots, \ f_k(x_n)$$

der Funktion $f_k(x)$ sowie die entsprechenden Werte ihrer Ableitung

$$(18) \qquad f_k'(x_k) = t_k, \quad f_k'(x_{k+1}), \ \ldots, \ f_k'(x_n)$$

sind bekannt und können vermittels der Formel (16) aus den gegebenen Werten (3), (4) und (5) berechnet werden.

Sind die Werte $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ sämtlich positiv, so ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Funktion $f(x)$ von den anfangs erklärten Eigenschaften, daß entweder $t_k = 0$ und $z_k^{(k)} = f_k(x_\nu), \ f_k'(x_\nu) = 0 \ (\nu = k+1, \ldots, n)$ ist, oder $t_k > 0$ und eine Funktion $f_{k+1}(x)$ existiert, die der Bedingung (2) genügt und in den Punkten $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ Werte erhält, welche aus den Werten (17) hervorgehen, wenn k durch $k+1$ ersetzt wird, während ihre Ableitung in den entsprechenden Punkten mit den durch dieselbe Substitution aus (18) erhaltenen Werten übereinstimmen. In dem erstgenannten Fall ist $f_k(x)$ eine reelle Konstante. Die Auflösung des Algorithmus (16) zeigt weiter, daß $f(x)$ dann eine rationale Funktion $(k-1)$-ter Ordnung ist, die auf der reellen Achse selbst reell ist.

Falls sämtliche $t_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ positiv sind, erhalten wir als letztes Glied unseres Algorithmus

$$(19) \qquad f_{n+1}(x) = \frac{1}{t_n(x - x_n)} - \frac{1}{f_n(x) - z_n^{(n)}}.$$

Setzt man hier eine beliebige Funktion $f_{n+1}(x)$ ein, die nur der Bedingung (2) genügt, so erhalten wir durch Auflösung des Algorithmus eine Funktion $f(x)$, die allen unseren Bedingungen genügt.

Wir haben also folgendes Resultat gefunden:

Satz I: *Damit eine Funktion existiert, die der Bedingung* (2) *genügt und in den Punkten* (3) *die Werte* (4) *mit den Ableitungswerten* (5) *annimmt, ist notwendig und hinreichend, daß einer der folgenden zwei Fälle eintrifft:*

1. *Es ist*

$$(20)\quad \begin{cases} t_1 > 0, \quad t_2 > 0, \ \ldots, \ t_{k-1} > 0, \quad t_k = 0, \\ f_k(x_\nu) = f_k(x_k), \quad f_k'(x_\nu) = 0 \qquad\qquad (\nu = k+1, \ldots, n), \end{cases}$$

wo k eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist.

In diesem Fall existiert nur eine durch die vorgeschriebenen Werte vollständig bestimmte Funktion von den genannten Eigenschaften. Diese Funktion ist rational, von $(k-1)$-ter Ordnung und auf der reellen Achse selbst reell.

2. *Sämtliche Zahlen t_ν erfüllen die Bedingungen*

$$(21)\qquad t_\nu > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Durch die Rekursionsformel (16) *entspricht dann jeder der Bedingung* (2) *genügenden Funktion $f_{n+1}(x)$ eine Funktion $f(x)$ der verlangten Art, und umgekehrt.*

4. Die Auflösung des Algorithmus (16) gibt für $f(x)$ den allgemeinen Ausdruck

$$(22)\qquad f(x) = \frac{\alpha_n(x) - \beta_n(x) f_{n+1}(x)}{\gamma_n(x) - \delta_n(x) f_{n+1}(x)},$$

wo die Ausdrücke α_n, β_n, γ_n und δ_n Polynome sind, die aus den Rekursionsformeln

$$(23)\quad \begin{cases} \alpha_\nu(x) = \alpha_{\nu-1}(x) - [z_\nu^{(\nu)} + t_\nu(x - x_\nu)]\,\beta_{\nu-1}(x) \\ \beta_\nu(x) = t_\nu(x - x_\nu)\,(\alpha_{\nu-1}(x) - z_\nu^{(\nu)}\,\beta_{\nu-1}(x)) \\ \gamma_\nu(x) = \gamma_{\nu-1}(x) - [z_\nu^{(\nu)} + t_\nu(x - x_\nu)]\,\delta_{\nu-1}(x) \\ \delta_\nu(x) = t_\nu(x - x_\nu)(\gamma_{\nu-1}(x) - z_\nu^{(\nu)}\,\delta_{\nu-1}(x)) \end{cases} \qquad (\nu = 2, \ldots, n)$$

berechnet werden können; für $\nu = 1$ ist

$$\alpha_1(x) = t_1(x - x_1) + z_1, \qquad \beta_1(x) = t_1 z_1 (x - x_1),$$
$$\gamma_1(x) = 1, \qquad \delta_1(x) = t_1(x - x_1).$$

Wie schon gesagt, erhält man sämtliche Funktionen $f(x)$ der anfangs erklärten Art, wenn in der Formel (22) für $f_{n+1}(x)$ alle der Bedingung (2) genügenden Funktionen hineingesetzt werden. Fixieren wir also einen bestimmten Wert x^* der Halbebene $J(x) > 0$, so gibt diese Formel die Gesamtheit der zulässigen entsprechenden Funktionenwerte $f(x^*)$, wenn

f_{n+1} sämtliche Werte der Halbebene $J(f_{n+1}) \geqq 0$ durchläuft. Weil nun $f(x^*)$ von $f_{n+1}(x^*)$ *linear* abhängt, so folgt hieraus, daß der dem festen Wert x entsprechende Funktionswert $z^* = f(x^*)$ innerhalb oder auf die Peripherie eines wohlbestimmten Kreises C_n der Halbebene der positiven Imaginärteile fällt. In dem letztgenannten Fall ist $f_{n+1}(x^*)$ reell. Die zugehörige Funktion $f_{n+1}(x)$ reduziert sich also auf eine reelle Konstante, und die entsprechende Funktion $f(x)$ ist somit eine eindeutig bestimmte rationale Funktion n-ter Ordnung. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Satz II. *Wenn $f(x)$ eine Funktion ist, die der Bedingung* (2) *genügt und die in den Punkten* (3) *die Werte* (4) *mit den Ableitungswerten* (5) *annimmt, so fällt ihr Wert z^* in einem weiteren Punkte x^* der Halbebene $J(x) > 0$ innerhalb oder auf die Peripherie eines durch die gegebenen Werte* (3), (4), (5) *und den Punkt x^* wohlbestimmten Kreises C_n der Halbebene $J(z) > 0$.*

Wenn umgekehrt z^* ein innerer Punkt von C_n ist, so gibt es unendlich viele Funktionen der genannten Art, die für $x = x^*$ den Wert z^* annehmen; ist z^* dagegen ein Randpunkt, so existiert nur eine solche Funktion. Sie ist rational von n-ter Ordnung und nimmt auf der reellen Achse reelle Werte an.

Wir fixieren einen beliebigen Punkt x der Halbebene $J(x) > 0$ und wollen untersuchen, wie die diesem Punkte entsprechenden Kreise C_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ zueinander liegen. Die Relation (15) zeigt, daß C_1 ein die reelle Achse im Punkte z_1 berührender Kreis ist, deren Radius, wenn x, x_1 und z_1 festgehalten werden, von dem Ableitungswert $t_1 = f'(x_1)$ bestimmt wird. Für $t_1 = 0$ zieht sich C_1 zu dem Punkt z_1 zusammen; mit wachsendem t_1 nimmt sein Radius zu und wächst mit t_1 über alle Grenzen.

Wenn der Punkt $z = f(x)$ insbesondere auf die Peripherie von C_1 fällt, so ist die Funktion $f(x)$ nach dem obengesagten eine wohlbestimmte *lineare* Funktion, die die Halbebene $J(x) \geqq 0$ auf sich selbst konform abbildet, so daß die Punkte x und x_1 in die Punkte z bzw. z_1 übergehen. Dies ist die von Herrn Julia gegebene Erweiterung des Schwarzschen Lemmas.

Die weitere Auflösung unseres Algorithmus zeigt, daß der Kreis C_2 den Kreis C_1, der Kreis C_3 den Kreis C_2 usw. von innen berührt (s. Fig. 1). *Die Kreise $C_1, C_2, \ldots, C_n$ bilden also ein System von einander berührenden Kreisen.*

5. Im vorigen haben wir angenommen, daß die Punkte (3) sämtlich untereinander verschieden sind. Diese Voraussetzung ist keineswegs

wesentlich. Um gleich einen extremen Fall zu behandeln, wollen wir annehmen, daß z. B. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ ist. Wie man unmittelbar einsieht, kann man alle oben gemachten Schlüsse wiederholen. Die Ausdrücke t_ν werden jetzt Funktionen der $2\nu - 1$ ersten Derivierten der Funktion im Punkte x_1. Wir haben also die Werte der $2n - 1$ ersten Ableitungen der Funktion für $x = x_1$ als gegeben anzunehmen. Der Satz I gibt dann wieder die notwendigen und hinreichenden Kriterien für diese Werte. Selbstverständlich behält auch unser Satz II seine Gültigkeit.

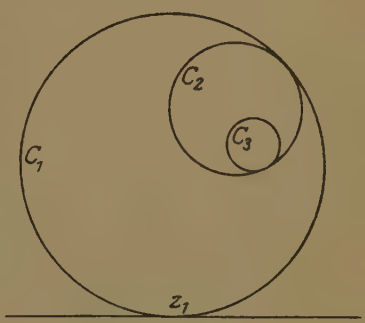


Fig. 1.

6. Wenn zwei oder mehrere der gegebenen ***Funktionenwerte*** (4) zusammenfallen, verliert unser Algorithmus seine Bedeutung und muß durch einen neuen ersetzt werden. Für den Fall, daß sämtliche Werte (4) untereinander gleich sind, wird dieser in folgender Weise gebildet:

Von der ersten Funktion $f_1(x) = f(x)$ ausgehend wird die zweite $f_2(x)$ wie früher durch die Formel (9) definiert. Diese Funktion nimmt in den Punkten $x_2, \ldots, x_n$ den Wert ∞ an und kann in der Umgebung jedes dieser Punkte in einer Reihe der Form

$$f_2(x) = -\frac{1}{t_\nu (x - x_\nu)} + c_0^{(\nu)} + c_1^{(\nu)}(x - x_\nu) + \ldots \qquad (\nu = 2, \ldots, n)$$

entwickelt werden, wo $t_\nu = f'(x_\nu)$ ist. Die Funktionen $f_3(x), f_4(x), \ldots, f_{n+1}(x)$ werden nun mit Hilfe der Rekursionsformel

$$(24) \qquad f_{\nu+1}(x) = \frac{1}{t_\nu (x - x_\nu)} + f_\nu(x) \qquad (\nu = 2, \ldots, n)$$

gebildet. Man sieht ganz wie früher, daß die Kriterien (21) bzw. (20) notwendig und hinreichend sind, damit eine Funktion $f(x)$ der verlangten Art existiert.

Löst man den Algorithmus (24) auf, so ergibt sich

$$(25) \qquad f(x) = z_1 + \frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{t_\nu (x - x_\nu)} - f_{n+1}(x)}.$$

Diese Formel gibt eine eineindeutige Beziehung zwischen allen Funktionen $f_{n+1}(x)$, die für $J(x) > 0$ einen positiven imaginären Teil haben, und allen Funktionen $f(x)$, die derselben Bedingung genügend in den Punkten (3) denselben Wert z_1 annehmen, während $f'(x_\nu) = t_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ wird. Aus diesem Umstand folgt wieder die Richtigkeit des Satzes II auch in

dem jetzt betrachteten speziellen Fall. Die Kreise C_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ berühren hier einander sämtlich in dem Punkte $z = z_1$.

7. Die oben erhaltenen Resultate weisen weitgehende Analogien mit den Sätzen auf, welche von Herrn Pick und uns gefunden sind, in dem Fall, daß die Werte (3) und (4) *im Innern* des gegebenen Gebietes liegen (vgl. die Fußnoten [2]) und [3])). Wir machen hier auf einige Unterschiede aufmerksam.

Wenn die Punkte (3) und die ihnen zugeordneten Punkte (4) innere Punkte der Halbebene $J(x) > 0$ sind, ergeben sich allein für diese n Wertepaare n verschiedene Ungleichungen. Wenn dazu die Werte der ersten Ableitung vorgeschrieben sind, erhält man n weitere Ungleichungen, also zusammen $2n$ Bedingungen. In dem oben behandelten Fall gelten, solange nur die Werte (3) und (4) vorgeschrieben sind, keine einschränkenden Bedingungen; die genannten Wertepaare können also ganz beliebig gewählt werden. Erst wenn die Ableitungswerte (5) gegeben sind, erhält man die Kriterien (21) (bzw. (20)), deren Anzahl nur n beträgt.

Dem Satze II entspricht ein ganz analoger von Herrn Pick bewiesener Satz, wenn die Punkte (3) uud (4) innere Punkte der oberen Halbebene sind. Das System der so erhaltenen Kreise C_ν unterscheidet sich von dem oben gefundenen dadurch, daß in jenem Fall jeder Kreis C_ν ganz innerhalb des vorangehenden $C_{\nu-1}$ liegt.

8. Es liegt die Frage nahe, wie die oben erhaltenen Ergebnisse zu modifizieren sind, wenn die Anzahl der vorgegebenen Werte (3), (4) und (5) unendlich ist. Ohne auf diese Aufgabe hier näher einzugehen, machen wir eine Bemerkung, die sich unmittelbar aus der Formel (25) ergibt.

Man sieht, daß der Kreis C_n hier mit wachsendem n gegen den Punkt z_1 konvergiert, sobald die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} J\left(\frac{1}{t_n (x - x_n)}\right) \tag{26}$$

in dem betreffenden Punkt x divergent ist. Nehmen wir insbesondere an, daß die Punkte (3) sich nicht im Unendlichkeitspunkt häufen, so folgt unmittelbar, daß die Reihe (26) in jedem Punkt x der oberen Halbebene divergiert, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t_n} \tag{27}$$

divergent ist. In diesem Fall muß die entsprechende Funktion $f(x)$ sich auf die Konstante z_1 reduzieren, was wieder nur dann möglich ist, wenn sämtliche $t_n = 0$ sind. Sind die Werte t_n von Null verschieden, so ergibt sich somit als eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Funktion

$f(x)$, die der Bedingung (2) genügt und in den Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ denselben Wert z_1 annimmt, daß die Reihe (27), wo $t_n = f'(x_n)$ ist, konvergiert.

Daß diese Bedingung auch hinreichend ist, zeigt die Funktion

$$z_1 + \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t_n (x - x_n)}}, \tag{28}$$

die, weil die Reihe in dem Nenner in jedem inneren Bereich der Halbebene $J(x) > 0$ gleichmäßig konvergiert, eine in dieser Halbebene reguläre Funktion darstellt, welche allen unseren Bedingungen genügt. Der allgemeine Ausdruck einer solchen Funktion wird durch die Formel

$$f(x) = z_1 + \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t_n (x - x_n)} - f_\omega(x)} \tag{29}$$

gegeben, wo $f_\omega(x)$ eine beliebige den Bedingungen (2) genügende Funktion ist.

Die Kreise C_n nähern sich in dem betrachteten Falle mit wachsendem n gewissen endlichen Grenzkreisen C_ω. Der Wert einer Funktion (29) in einem beliebigen Punkt der Halbebene $J(x) > 0$ fällt innerhalb oder auf die Peripherie des entsprechenden Kreises C_ω. Der letzte Fall trifft dann und nur dann zu, wenn bei der bezüglichen Funktion (29) $f_\omega(x)$ eine reelle Konstante ist.

(Eingegangen am 29. März 1921.)

Zwei charakteristische Eigenschaften der Flächen konstanten Krümmungsmaßes.

Von

Heinrich Liebmann in Heidelberg.

Bekanntlich sind die Flächen konstanten Krümmungsmaßes die einzigen, die sich auf die Ebene geodätisch abbilden lassen. Diese Eigenschaft ist dadurch begründet, *daß nur bei den Flächen konstanten Krümmungsmaßes die geodätischen Linien eine lineare Mannigfaltigkeit bilden*, d. h. daß nur bei ihnen die Gleichung der geodätischen Linien sich in der Form schreiben läßt

$$f(u,v) = c_1 g(u,v) + c_2, \tag{1}$$

wobei f und g voneinander unabhängige Funktionen der Flächenparameter u, v sind. Die geodätische Abbildung auf die Ebene ist dann durch die Gleichungen

$$x = f(u,v), \qquad y = g(u,v)$$

gegeben.

Für diesen Satz wollen wir hier einen einfachen Beweis liefern.

Außerdem aber soll mit denselben einfachen Methoden (Verwendung der Minimalkurven als Parameterlinien, elementare Determinantensymbolik[1]) der weitergehende Satz bewiesen werden:

Charakteristisch für die Flächen konstanten Krümmungsmaßes ist, daß auf ihnen die Lieschen geodätischen Kreise[2]) *eine lineare Mannig-*

[1]) Diese Symbolik geht im Grunde auf H. Graßmann zurück. Sie ist dann in erster Linie von M. Reiß (Math. Ann. 2 (1870), S. 385–426) bedeutend gefördert worden.

[2]) Das sind die Kurven konstanter geodätischer Krümmung. Ihre Differentialgleichung ist auf S. 136 von Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen I (Leipzig 1896) angegeben.

altigkeit bilden, d. h. sich darstellen lassen durch eine Gleichung von er Form

$$f(u, v) = c_1 g(u, v) + c_2 h(u, v) + c_3. \tag{2}$$

Wir beginnen mit dem Beweise des ersten Satzes und stellen bei ieser Gelegenheit einige Beziehungen auf (vgl. den „Hilfssatz" unten), die eiterhin gebraucht werden.

Aus (1) folgt

$$D = \begin{vmatrix} f' & f'' \\ g' & g'' \end{vmatrix} = 0.$$

abei ist zu setzen

$$f' = f_1 + v' f_2, \qquad f'' = f_{11} + 2 f_{12} v' + f_{22} (v')^2 + f_2 v'', \tag{3}$$

nd die entsprechenden Ausdrücke sind an Stelle von g' und g'' einzusetzen; ie Fußmarken 1 und 2 deuten selbstverständlich die Differentiation nach u und v an.

Die Determinante schreiben wir jetzt symbolisch

$$D = (f_1 + v' f_2,\ f_{11} + 2 v' f_{12} + (v')^2 f_{22} + v'' f_2) \tag{4}$$

nd haben zu verlangen, daß $D = 0$ die Differentialgleichung der geodäischen Linien einer Fläche mit dem Linienelement

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

darstellt. Diese Differentialgleichung hat bei Verwendung von Minimalkurven als Parameterlinien[3]) die einfache Gestalt

$$F v'' + F_2 (v')^2 - F_1 v' = 0. \tag{5}$$

Es darf also, wenn man (4) entwickelt, kein von v' freies Glied vorkommen, und auch nicht $(v')^3$. Dies führt, wie die Entwickelung von D zeigt, auf die Forderungen

$$(f_1, f_{11}) = (f_2, f_{22}) = 0, \tag{6}$$

aus denen folgt

$$\begin{aligned} f_{11} &= \lambda f_1, \quad g_{11} = \lambda g_1, \\ f_{22} &= \mu f_2, \quad g_{22} = \mu g_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Setzt man diese Werte ein, so erhält man

$$\begin{aligned} D &= (f_1 + v' f_2,\ \lambda f_1 + (\mu (v')^2 + v'') f_2 + 2 v' f_{12}) \\ &= (f_1, f_2)(v'' + \mu (v')^3 - \lambda v') + 2 v' (f_1, f_{12}) + 2 v'^2 (f_2, f_{12}) = 0, \end{aligned}$$

[3]) Vgl. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen (Leipzig 1902), Tafel XVIII und XXI im Anhang.

oder, wenn man einführt

$$U=(f_1, f_2), \quad V=(f_1, f_{12}), \quad W=(f_2, f_{12}) \tag{8}$$

und beachtet, daß wegen (7) die Beziehungen bestehen

$$\begin{aligned} U_1&=(f_{11}, f_2)+(f_1, f_{12})=\lambda U+V \\ U_2&=(f_{12}, f_2)+(f_1, f_{22})=-W+\mu U, \end{aligned} \tag{9}$$

auf die einfache Gleichung

$$v'' U+(v')^2(3\mu U-2U_2)-v'(3\lambda U-2U_1)=0. \tag{4'}$$

Im Hinblick auf (5) ist nun noch zu verlangen

$$\frac{\partial}{\partial u}(3\mu-2U_2)=\frac{\partial}{\partial v}(3\lambda-2U_1)$$

oder

$$\mu_1=\lambda_2=w(u, v); \tag{10}$$

der partielle Differentialquotient von μ nach u muß gleich dem von λ nach v sein.

Aus (7) und (10) sind jetzt weitere Folgerungen zu ziehen, die wir hier gesondert zusammenstellen, da sie auch für die Untersuchung der geodätischen Kreise von Bedeutung sind.

Aus (7) folgt mit Heranziehung von (10)

$$\begin{aligned} f_{111}&=(\lambda f_1)_1=\lambda_1 f_1+\lambda^2 f_1=f_1(\lambda_1+\lambda^2), \\ f_{112}&=(\lambda f_1)_2=\lambda_2 f_1+\lambda f_{12}=w f_1+\lambda f_{12}, \\ f_{122}&=(\mu f_2)_1=\mu_1 f_2+\mu f_{12}=w f_2+\mu f_{12}, \\ f_{222}&=(\mu f_2)_2=\mu_2 f_2+\mu^2 f_2=f_2(\mu_2+\mu^2). \end{aligned} \tag{11}$$

Man erhält dann mit Verwendung von (7) und (10) die Tabelle

$$\begin{aligned} V_1&=(f_1, f_{12})_1=(f_{11}, f_{12})+(f_1, f_{112})=\lambda(f_1, f_{12})+(f_1, wf_1+\lambda f_{12})=2\lambda \\ V_2&=wU+\mu V, \quad W_1=-wU+\lambda W, \quad W_2=2\mu W, \end{aligned} \tag{12}$$

in der die drei letzten Formeln nach dem Vorbild der ersten zu berechnen sind.

Ferner findet man aus (12) und (9)

$$V_{12}=2\lambda_2 V+2\lambda(wU+\mu V)=2(w+\lambda\mu)V+2\lambda w U$$

$$V_{21}=w_1 U+w(\lambda U+V)+wV+2\lambda\mu V=2(w+\lambda\mu)V+(w_1+\lambda w)U$$

und gelangt zu den Beziehungen

$$w_1=\lambda w, \quad w_2=\mu w, \tag{13}$$

von denen die erste aus $V_{12}=V_{21}$, die zweite in ähnlicher Weise aus $W_{12}=W_{21}$ abzuleiten ist.

Wir wollen das Ergebnis dieser kleinen Rechnung so zusammenfassen, daß dabei die Funktionen U, V, W wieder abgestreift werden.

Hilfssatz. Gelten die Beziehungen

7) $$\frac{f_{11}}{f_1} = \frac{g_{11}}{g_1} = \lambda, \qquad \frac{f_{22}}{f_2} = \frac{g_{22}}{g_2} = \mu,$$

und ist außerdem der Differentialquotient von λ nach v gleich dem von μ nach u, also

10) $$\lambda_2 = \mu_1 = w(u, v),$$

dann ist auch

13) $$w_1 = \lambda w, \qquad w_2 = \mu w.$$

Der Beweis für die charakterische Eigenschaft der geodätischen Linien auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes ist nun leicht zum Abschluß zu bringen.

Wir verlangen, daß die Gleichung (4′), die wir jetzt nach (9) so schreiben können

$$v'' + (v')^2\left(\mu + \frac{2W}{U}\right) - v'\left(\lambda - \frac{2V}{U}\right) = 0$$

geodätische Linien darstellt, daß also wegen (5) ist

$$\frac{\partial \lg F}{\partial u} = \lambda - \frac{2V}{U}, \qquad \frac{\partial \lg F}{\partial v} = \mu + \frac{2W}{U}.$$

Das Krümmungsmaß ist dann nach der Formel[4])

14) $$K = -\frac{1}{F}\frac{\partial^2 \lg F}{\partial u\, \partial v}$$

zu berechnen, welche jetzt wegen (10), (9) und (12) ergibt

$$\frac{\partial^2 \lg F}{\partial u\, \partial v} = \lambda_2 - \frac{2(V_2 U - U_2 V)}{U^2} = -w - \frac{2VW}{U^2}$$

also

$$K = \frac{1}{F}\left(w + \frac{2VW}{U^2}\right).$$

Hieraus folgt weiter

$$-F\frac{\partial}{\partial u}(K) = \frac{F_1}{F}\left(w + \frac{2VW}{U^2}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(w + \frac{2VW}{U^2}\right).$$

Hierin lassen sich rechts alle Glieder durch λ, μ, w, U, V, W ausdrücken mit Verwendung der Tabelle (12) und der Formeln (9), (10) und (13). Es ergibt sich der Wert Null. Dasselbe gilt für

$$F\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{F}\frac{\partial^2 \lg F}{\partial u\, \partial v}\right).$$

---

[4]) Scheffers, a. a. O. (Flächentheorie) Tafel XVIII.

Damit ist also gezeigt, daß die Differentialgleichung (4′) in der Tat nur dann die geodätischen Linien einer Fläche darstellen kann, wenn diese Fläche konstantes Krümmungsmaß besizt.

Da anderseits bekannt ist, daß auf diesen Flächen die geodätischen Linien eine lineare Mannigfaltigkeit (1) bilden, so ist der Satz bewiesen, daß diese Eigenschaft charakteristisch ist.

Wesentlich für den Gedankengang des Beweises ist die Methode, daß beide Forderungen — vorgeschriebene Lösungsform (1) und vorgeschriebene Form der Differentialgleichung (5) — *abwechselnd* verwendet werden.

Wir gehen jetzt zu den Kurven konstanter geodätischer Krümmung über; ihre Differentialgleichung ist bei Verwendung von Minimalkurven als Parameterlinien nach Lie:

$$(15) \qquad -2v'''v' + 3(v'')^2 - \frac{4R}{Z}(v')^2 + \frac{4T}{Z}(v')^4 = 0.$$

Dabei ist

$$F = \frac{1}{2Z^2}, \qquad R = Z_{11}, \qquad T = Z_{22}.$$

Hieraus erhält man für das Krümmungsmaß

$$K = -\frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u\,\partial v} = -4ZZ_{12} + 4Z_1Z_2,$$

also wird

$$K_1 = \frac{\partial K}{\partial u} = 4(Z_2Z_{11} - ZZ_{112}),$$

$$K_2 = \frac{\partial K}{\partial v} = 4(Z_1Z_{22} - ZZ_{122}).$$

Anderseits wird

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{4R}{Z}\right) = \frac{4(ZZ_{112} - Z_2Z_{11})}{Z^2} = \frac{1}{Z^2}K_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{4T}{Z}\right) = \frac{4(ZZ_{122} - Z_1Z_{22})}{Z^2} = \frac{1}{Z^2}K_2.$$

Damit ist also nachgewiesen, daß, *wenn die Differentialgleichung*

$$(16) \qquad -2v'''v' + 3(v'')^2 - l(u,v)\cdot(v')^2 + m(u,v)\cdot(v')^4 = 0$$

die geodätischen Kreise einer Fläche darstellt, diese Fläche konstantes Krümmungsmaß besitzt, sobald

$$(17) \qquad \frac{\partial l}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial m}{\partial u} = 0.$$

Wir gehen jetzt von der Forderung aus, daß die geodätischen Kreis eine lineare Mannigfaltigkeit

$$(2) \qquad f = c_1 g + c_2 h + c_3$$

bilden sollen. Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} f' & f'' & f''' \\ g' & g'' & g''' \\ h' & h'' & h''' \end{vmatrix} = (f', f'', f''') = 0, \tag{18}$$

und es ist zunächst einmal zu verlangen, daß sie die Form (16) besitzt. Es ist noch einzusetzen (vgl. (3))

$$\begin{aligned} f' &= f_1 + v' f_2, \\ f'' &= f_{11} + 2v' f_{12} + (v')^2 f_{22} + v'' f_2, \\ f''' &= f_{111} + 3v' f_{112} + 3(v')^2 f_{122} + (v')^3 f_{222} + 3v''(f_{12} + v' f_{12}) + v''' f_2. \end{aligned} \tag{3'}$$

Entwickelt man (18) mit Verwendung von (3'), so bekommt v''' den Faktor

$$(f_1, f_{11}, f_2) + v'((f_2, f_{11}, f_2) + 2(f_1, f_{12}, f_2)) + (v')^2(2(f_2, f_{12}, f_2) + (f_1, f_{22}, f_2)) + (v')^3(f_2, f_{22}, f_2).$$

Hiervon sind einige Elemente als Determinanten mit gleichen Kolonnen identisch gleich Null, und es muß, um die Anpassung an (16) zu erreichen, noch verlangt werden:

$$(f_1, f_2, f_{11}) = (f_1, f_2, f_{22}) = 0, \tag{19}$$

dagegen muß der Faktor von $-2v'v'''$, den wir, weil er eine ähnliche Rolle wie früher die Determinante (f_1, f_2) spielt, wieder mit U bezeichnen wollen, von Null verschieden sein.

$$(f_1, f_2, f_{12}) = U \lesseqgtr 0. \tag{20}$$

Aus (19) folgt noch

$$\begin{aligned} f_{11} &= \lambda f_1 + \bar{\lambda} f_2, & f_{22} &= \bar{\mu} f_1 + \mu f_2, \\ g_{11} &= \lambda g_1 + \bar{\lambda} g_2, & g_{22} &= \bar{\mu} g_1 + \mu g_2, \\ h_{11} &= \lambda h_1 + \bar{\lambda} h_2, & h_{22} &= \bar{\mu} h_1 + \mu h_2 \end{aligned}$$

und durch Differentiation

$$\begin{aligned} f_{111} &= (\lambda_1 + \lambda^2) f_1 + \bar{\lambda}_1 f_2 + \bar{\lambda} f_{12}, \dots \\ f_{222} &= \bar{\mu}_2 f_1 + (\mu_2 + \mu^2) f_2 + \bar{\mu} f_{12}, \dots \end{aligned}$$

Wegen (16) darf in (18) ein von v' freies Glied und ein mit dem Faktor $(v')^3$ behaftetes nicht vorkommen, und das führt auf die beiden Forderungen

$$(f_1, f_{11}, f_{111}) = (f_2, f_{22}, f_{222}) = 0.$$

Es ist aber

$$(f_1, f_{11}, f_{111}) = (f_1, \lambda f_1 + \bar{\lambda} f_2, (\lambda_1 + \lambda^2) f_1 + \bar{\lambda}_1 f_2 + \lambda f_{12}) = \bar{\lambda}^2 U$$

und entsprechend

$$(f_2, f_{22}, f_{222}) = -\bar{\mu}^2 U,$$

daher ist wegen (20)

$$\bar{\lambda} = \bar{\mu} = 0,$$

und wir haben also jetzt für f, g und h die Bedingungen

$$(7') \qquad \frac{f_{11}}{f_1} = \frac{g_{11}}{g_1} = \frac{h_{11}}{h_1} = \lambda, \qquad \frac{f_{22}}{f_2} = \frac{g_{22}}{g_2} = \frac{h_{22}}{h_2} = \mu.$$

Für die totalen Differentialquotienten von f und entsprechend von g und h erhält man jetzt die Tabelle (vgl. (11))

$$(21) \qquad \begin{aligned} f' &= f_1 + v f_2, \\ f'' &= \lambda f_1 + A f_2 + 2v' f_{12}, \\ f''' &= B f_1 + C f_2 + D f_{12}, \end{aligned}$$

in der zu setzen ist

$$(22) \qquad \begin{aligned} A &= v'' + \mu (v')^2, \\ B &= \lambda_1 + \lambda^2 + 3 v' \lambda_2, \\ C &= 3 (v')^2 \mu_1 + (v')^3 (\mu_2 + \mu^2) + 3 v'' v' + \mu v''', \\ D &= 3 v' \lambda + 3 (v')^2 \mu + 4 v''. \end{aligned}$$

Aus (18) wird dann

$$(f', f'', f''') = (f_1, f_2, f_{12}) \begin{vmatrix} 1 & v' & 0 \\ \lambda & A & 2v' \\ B & C & D \end{vmatrix} = 0.$$

Da der erste Faktor U (vgl. 20) sicher von Null verschieden ist, so muß der zweite verschwinden, es muß also sein, wie die Entwickelung der Determinante ergibt,

$$(23) \qquad \begin{aligned} &-2 v' v''' + 3 (v'')^2 + (v')^2 (2\lambda_1 - \lambda^2) + 6 (v')^3 (\lambda_2 - \mu_1) \\ &- (v')^4 (2\mu_2 - \mu^2) = 0. \end{aligned}$$

Endlich ist in Hinblick auf (16), worin $(v')^3$ nicht vorkommt, noch zu verlangen

$$(10') \qquad \lambda_2 = \mu_1 \quad (= w(u, v)).$$

Damit sind die Vorbedingungen für die Gültigkeit des Hilfssatzes sämtlich erfüllt, nämlich (7) und (10). Daher ist auch

$$(13') \qquad \lambda_{21} = w_1 = \lambda w, \qquad \mu_{12} = w_2 = \mu w.$$

Nun ist (vgl. (17)) noch zu verlangen:

$$l_2 = 2\lambda\lambda_2 - 2\lambda_{12} = 2\lambda w - 2w_1 = 0,$$
$$m_1 = 2\mu\mu_1 - 2\mu_{12} = 2\mu w - 2w_2 = 0,$$

nd diese Forderungen sind wegen (13′) schon befriedigt.

Damit ist also gezeigt: Wenn die Lösung einer Differentialgleichung ritter Ordnung die Form haben soll

2) $$f(u,v) = c_1 g(u,v) + c_2 h(u,v) + c_3,$$

nd wenn überdies die Differentialgleichung die geodätischen Kreise einer läche bestimmen soll, dann muß diese Fläche konstantes Krümmungsaß besitzen.

Da anderseits die geodätischen Kreise einer solchen Fläche bekanntch eine lineare Mannigfaltigkeit bilden, so ist hiermit der Beweis vollendet nd man hat das Ergebnis:

Auf den Flächen konstanter Gaußscher Krümmung und nur auf hnen bilden die Kurven konstanter geodätischer Krümmung eine lineare reidimensionale Mannigfaltigkeit.

(Eingegangen am 28. April 1921.)

Über eine funktionale Ungleichung in der Theorie der konvexen Körper.

Von

Hans Rademacher in Berlin.

---

1. Nach dem Vorgange von Minkowski pflegt man einen konvexen Bereich des n-dimensionalen Raumes durch die Angabe einer gewissen Funktion von n Variablen, der Stützebenenfunktion, zu charakterisieren. Eine solche Funktion genügt nun drei kennzeichnenden Bedingungen, und zwar sind dies, im Falle von zwei Dimensionen, die folgenden Funktionalbeziehungen:

$$\text{I.} \quad H(0,0)=0,$$

$$\text{II.} \quad H(tu_1, tu_2)=tH(u_1,u_2) \quad \text{für} \quad t>0,$$

$$\text{III.} \quad H(u_1+v_1, u_2+v_2)\leqq H(u_1,u_2)+H(v_1,v_2).$$

Gewisse geometrische Betrachtungen legen es nun nahe, statt der Ungleichung III eine andere einzuführen, und zwar schließe ich mich an eine Bemerkung des Herrn Blaschke an, wenn ich im folgenden für $H(u_1, u_2)$ die Bedingungen I, II, statt III jedoch die folgende

$$\text{IV.} \quad \begin{vmatrix} H(u_1,u_2) & u_1 & u_2 \\ H(v_1,v_2) & v_1 & v_2 \\ H(w_1,w_2) & w_1 & w_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \end{vmatrix} \geqq 0 \quad \text{für} \quad \begin{matrix} u_1^2+u_2^2=1, \\ v_1^2+v_2^2=1, \\ w_1^2+w_2^2=1 \end{matrix}$$

zugrunde lege[1]). Es soll nun gezeigt werden, daß das System I, II, III völlig äquivalent mit I, II, IV ist.

---

[1]) W. Blaschke, Beweise zu Sätzen von Brunn und Minkowski über die Minimaleigenschaft des Kreises, Jahresbericht der D. Math. Ver. 23 (1914), S. 210–234, insb. S. 222, Anm. [6]). Dort führt der Verf. statt der Variablen u, v, w zwar die sin und cos dreier Winkel ein, da er überhaupt die Funktion $h(\varphi)=H(\sin\varphi, -\cos\varphi)$ betrachtet, doch wollen wir, des Anschlusses an den allgemeinen Fall halber, die Stützgeradenfunktion homogen schreiben.

Wollte man nun auch im dreidimensionalen Fall die Ungleichung III durch eine zu IV analoge ersetzen, so gelangt man damit nicht zum Ziel. Vielmehr wird sich zeigen, daß dadurch nur spezielle Stützebenenfunktionen, und zwar die der Kugel bestimmt werden.

2. Wir beweisen zunächst, daß aus I, II, III die Ungleichung IV folgt. Dazu ist nötig, zu zeigen, daß unter den Voraussetzungen $u_1^2 + u_2^2 = 1$, $v_1^2 + v_2^2 = 1$, $w_1^2 + w_2^2 = 1$ stets

$$|u_1 v_2 - v_1 u_2| + |v_1 w_2 - w_1 v_2| \geqq |w_1 u_2 - u_1 w_2| \tag{1}$$

ist. Setzen wir nämlich

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin\alpha, & v_1 &= \sin\beta, & w_1 &= \sin\gamma, \\ u_2 &= \cos\alpha, & v_2 &= \cos\beta, & w_2 &= \cos\gamma, \end{aligned}$$

so nimmt (1) die Gestalt an

$$|\sin(\alpha-\beta)| + |\sin(\beta-\gamma)| \geqq |\sin(\alpha-\gamma)|,$$

was wegen

$$|\sin(\alpha-\gamma)| = |\sin(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)| \tag{2}$$

stets erfüllt ist. Nimmt man nun die drei Wertepaare (u_1, u_2), (v_1, v_2), (w_1, w_2) voneinander verschieden an, so kann man (was man ev. durch Umbenennung erreichen kann) voraussetzen

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \end{vmatrix} > 0, \tag{3}$$

da ja drei verschiedene Punkte des Einheitskreises nicht in einer Geraden liegen können. Da nun wegen (1) und den zu (1) durch Vertauschung der Wertepaare hervorgehenden Ungleichungen stets die Summe der absoluten Beträge von zweien der Unterdeterminanten in (3) den absoluten Betrag der dritten überwiegt, so müssen von den drei Determinanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

entweder alle *drei positiv* oder *zwei positiv* und *eine negativ* sein. Im ersten Fall ist nach I und II wegen $D_1, D_2, D_3 \geqq 0$

$$\begin{aligned} &D_1 H(u_1, u_2) + D_2 H(v_1, v_2) + D_3 H(w_1, w_2) \\ &\quad = H(D_1 u_1, D_1 u_2) + H(D_2 v_1, D_2 v_2) + H(D_3 w_1, D_3 w_2), \end{aligned}$$

was nach III

$$\geqq H(D_1 u_1 + D_2 v_1 + D_3 w_1,\ D_1 u_2 + D_2 v_2 + D_3 w_2) = H(0, 0) = 0$$

ist, so daß schließlich

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} H(u_1, u_2) & u_1 & u_2 \\ H(v_1, v_2) & v_1 & v_2 \\ H(w_1, w_2) & w_1 & w_2 \end{vmatrix} \geqq 0$$

folgt, womit wegen der vorausgesetzten Ungleichung (3) die Bedingung IV bewiesen ist.

Im zweiten Falle sei etwa $D_1 > 0$, $D_2 \geqq 0$, $D_3 < 0$. Dann folgt aus I, II und III

$$\begin{aligned} D_1 H(u_1, u_2) + D_2 H(v_1, v_2) &\geqq H(D_1 u_1 + D_2 v_1, D_1 u_2 + D_2 v_2) \\ &= H(-D_3 w_1, -D_3 w_2) = -D_3 H(w_1, w_2), \end{aligned}$$

so daß (4) und damit IV wieder bestätigt ist.

3. Nun seien umgekehrt I, II und IV vorausgesetzt, und auf III soll geschlossen werden. Es seien (u_1, u_2) und (v_1, v_2) zwei beliebige Wertepaare, die nicht auf dem Einheitskreise zu liegen brauchen, über die jedoch zunächst noch

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

vorausgesetzt werden muß. Auf die drei Wertepaare

$$\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}, \quad \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}};$$

$$\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, \quad \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}};$$

$$\frac{u_1+v_1}{\sqrt{(u_1+v_1)^2+(u_2+v_2)^2}}, \quad \frac{u_2+v_2}{\sqrt{(u_1+v_1)^2+(u_2+v_2)^2}}$$

läßt sich jedoch IV anwenden; die Wurzeln sind sämtlich positiv gemeint. Benutzt man gleich noch II und multipliziert mit positiven Faktoren, da es in IV doch nur auf das Vorzeichen ankommt, so erhält man

$$\begin{vmatrix} H(u_1, u_2) & u_1 & u_2 \\ H(v_1, v_2) & v_1 & v_2 \\ H(u_1+v_1, u_2+v_2) & u_1+v_1 & u_2+v_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{u_1^2+u_2^2} & u_1 & u_2 \\ \sqrt{v_1^2+v_2^2} & v_1 & v_2 \\ \sqrt{(u_1+v_1)^2+(u_2+v_2)^2} & u_1+v_1 & u_2+v_2 \end{vmatrix}$$

oder unter Berücksichtigung von (5)

$$(6) \quad \{H(u_1+v_1, u_2+v_2) - H(u_1, u_2) - H(v_1, v_2)\} \cdot \{\sqrt{(u_1+v_1)^2+(u_2+v_2)^2} - \sqrt{u_1^2+u_2^2} - \sqrt{v_1^2+v_2^2}\} \geqq 0.$$

Nun ist aber

$$\sqrt{(u_1+v_1)^2+(u_2+v_2)^2} \leqq \sqrt{u_1^2+u_2^2} + \sqrt{v_1^2+v_2^2},$$

denn

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 \leqq + \sqrt{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}$$

nach der Schwarzschen Ungleichheit, wo das Gleichheitszeichen nur bei $u_1 : u_2 = v_1 : v_2$ gelten könnte, also durch (5) ausgeschlossen ist. Unter Voraussetzung von (5) ist also die zweite Klammer von (6) stets negativ, folglich die erste Klammer nicht positiv, d. h. III muß gelten.

Durch eine Stetigkeitsbetrachtung läßt sich (5) nachträglich ausschalten. Ist $u_2 = 0$, so folgt aus I und II sofort die Stetigkeit von H in u_1. Für $u_2 \neq 0$, $\delta \neq 0$ ist aber

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \delta & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} u_1 + \delta & u_2 \\ \delta & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

so daß III bei der Einschränkung (5) anwendbar ist und

$$H(u_1, u_2) - H(-\delta, 0) \leqq H(u_1 + \delta, u_2) \leqq H(u_1, u_2) + H(\delta, 0)$$

ergibt. Ist G der größere der beiden Werte

$$|H(1, 0)| \quad \text{und} \quad |H(-1, 0)|,$$

so folgt aus II

$$|H(u_1 + \delta, u_2) - H(u_1, u_2)| \leqq |\delta| \cdot G,$$

also auch diesmal die Stetigkeit von H in u_1. Ebenso würde die Stetigkeit in u_2 sich ergeben.

Nun sei

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ist ein Wertepaar gleich 0, 0, so ist III wegen I ohnehin erfüllt. Sonst sei etwa $u_2 \neq 0$. Dann ist für $\delta \neq 0$ auch

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 + \delta & v_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

so daß III gültig ist und

$$H(u_1, u_2) + H(v_1 + \delta, v_2) \geqq H(u_1 + v_1 + \delta, u_2 + v_2)$$

liefert, woraus wegen der Stetigkeit von H in jedem Argument

$$H(u_1, u_2) + H(v_1, v_2) \geqq H(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

ohne jede Einschränkung folgt.

4. Wir gehen zum Fall von drei Dimensionen über. Vorausgesetzt sei also

$$\text{I}^*. \quad H(0, 0, 0) = 0,$$

$$\text{II}^*. \quad H(tu_1, tu_2, tu_3) = tH(u_1, u_2, u_3), \qquad t > 0.$$

Wir wollen zunächst zeigen, daß

III*. $H(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3) \leqq H(u_1, u_2, u_3) + H(v_1, v_2, v_3)$

stets gilt, sobald H die funktionale Ungleichung

IV*. $$\begin{vmatrix} H(u_1,u_2,u_3) & u_1 & u_2 & u_3 \\ H(v_1,v_2,v_3) & v_1 & v_2 & v_3 \\ H(w_1,w_2,w_3) & w_1 & w_2 & w_3 \\ H(x_1,x_2,x_3) & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \geqq 0 \quad \text{bei} \quad \begin{matrix} u_1^2+u_2^2+u_3^2= \\ v_1^2+v_2^2+v_3^2= \\ w_1^2+w_2^2+w_3^2= \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2= \end{matrix}$$

erfüllt. Dagegen folgt aus I*, II*, III* *nicht* IV*, vielmehr ist I*, II*, IV* für eine weit engere Klasse von Funktionen gültig als I*, II*, III*.

Zunächst schließt man ganz analog zu den Überlegungen von § 3, daß unter der Voraussetzung

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7}$$

aus IV*

$$\begin{aligned} H(u_1+v_1+w_1, u_2+v_2+w_2, u_3+v_3+w_3) \\ \leqq H(u_1,u_2,u_3) + H(v_1,v_2,v_3) + H(w_1,w_2,w_3) \end{aligned} \tag{8}$$

folgt. Der Beweis für die Stetigkeit von H aus (7) und (8) läßt sich etwa folgendermaßen führen. Für

$$u_1 \neq 0, \qquad u_2 \neq 0, \qquad u_3 \neq 0$$

ist

$$\begin{vmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_1 & 0 & 0 \\ 0 & -u_2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{9}$$

also folgt aus (7) und (8)

$$H(u_1, u_2, u_3) \leqq H(u_1, 0, 0) + H(0, u_2, 0) + H(0, 0, u_3)$$

und

$$H(u_1, u_2, u_3) + H(-u_1, 0, 0) + H(0, -u_2, 0) \geqq H(0, 0, u_3),$$

also wegen II*, wenn G der größte der sechs Werte

$$|H(\pm 1, 0, 0)|, \qquad |H(0, \pm 1, 0)|, \qquad |H(0, 0, \pm 1)|$$

ist,

$$|H(u_1, u_2, u_3)| \leqq G(|u_1| + |u_2| + |u_3|), \tag{10}$$

jedoch nur unter der Voraussetzung (9).

Um nun die Stetigkeit von H in u_1 zu beweisen, kann man voraussetzen, daß nicht u_2 und u_3 beide verschwinden, da für diesen trivialen Fall die Stetigkeit aus I* und II* folgt:

11a) $$|H(u_1+\delta, 0, 0) - H(u_1, 0, 0)| \leqq G|\delta|.$$

Ist nun $\delta_1 \neq 0$ und verschwinden u_2 und u_3 nicht beide, so gibt es beliebig kleine von Null verschiedene Zahlen δ_2 und δ_3, so daß

$$\begin{vmatrix} u_1+\delta_1 & u_2 & u_3 \\ -\frac{\delta_1}{2} & \delta_2 & \delta_3 \\ -\frac{\delta_1}{2} & -\delta_2 & -\delta_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{\delta_1}{2} & \delta_2 & \delta_3 \\ \frac{\delta_1}{2} & -\delta_2 & -\delta_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ausfallen. Dann schließt man aus (7) und (8):

$$H(u_1, u_2, u_3) \leqq H(u_1+\delta_1, u_2, u_3) + H\left(-\tfrac{\delta_1}{2}, \delta_2, \delta_3\right) + H\left(-\tfrac{\delta_1}{2}, -\delta_2, -\delta_3\right),$$

$$H(u_1+\delta_1, u_2, u_3) \leqq H(u_1, u_2, u_3) + H\left(\tfrac{\delta_1}{2}, \delta_2, \delta_3\right) + H\left(\tfrac{\delta_1}{2}, -\delta_2, -\delta_3\right),$$

oder

$$-H\left(-\tfrac{\delta_1}{2}, \delta_2, \delta_3\right) - H\left(-\tfrac{\delta_1}{2}, -\delta_2, -\delta_3\right) \leqq H(u_1+\delta_1, u_2, u_3) - H(u_1, u_2, u_3) \leqq H\left(\tfrac{\delta_1}{2}, \delta_2, \delta_3\right) + H\left(\tfrac{\delta_1}{2}, -\delta_2, -\delta_3\right).$$

Die beiden äußersten Seiten der Ungleichung erlauben aber eine Anwendung von (10), so daß man

$$|H(u_1+\delta_1, u_2, u_3) - H(u_1, u_2, u_3)| \leqq G(|\delta_1| + 2|\delta_2| + 2|\delta_3|)$$

erhält. Da hierin aber δ_2 und δ_3 beliebig klein wählbar sind, so ist

11b) $$|H(u_1+\delta_1, u_2, u_3) - H(u_1, u_2, u_3)| \leqq G \cdot |\delta_1|.$$

Die Ungleichungen (11) sagen zusammen aus, daß H in u_1 die Lipschitzsche Bedingung erfüllt. Da dies sich ebenso für die andern Variablen zeigen läßt, so folgt, daß H die Lipschitzsche Bedingung auch in allen drei Variablen zusammen erfüllt und also *stetig* ist.

Sind nun die u, die v, die w so beschaffen, daß

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0,$$

so gibt es in beliebiger Nähe dieser Werte andere, sie mögen

$$u_1', u_2', u_3', v_1', \ldots \text{ usw.}$$

heißen, für die

$$\begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ w_1' & w_2' & w_3' \end{vmatrix} \neq 0$$

ist und für die also

$$H(u_1' + v_1' + w_1',\ u_2' + v_2' + w_2',\ u_3' + v_3' + w_3')$$
$$\leqq H(u_1', u_2', u_3') + H(v_1', v_2', v_3') + H(w_1', w_2', w_3')$$

ist. Wegen der Stetigkeit von H folgt aber hieraus

$$H(u_1 + v_1 + w_1,\ u_2 + v_2 + w_2,\ u_3 + v_3 + w_3)$$
$$\leqq H(u_1, u_2, u_3) + H(v_1, v_2, v_3) + H(w_1, w_2, w_3)$$

ohne jede Einschränkung und für $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ insbesondere wegen I^* die zu beweisende Ungleichung

$$H(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \leqq H(u_1, u_2, u_3) + H(v_1, v_2, v_3).$$

5. Nun seien I^*, II^* und III^* vorausgesetzt. Dann folgt auf bekannte Weise zunächst die Stetigkeit von H. Um nun IV^* zu prüfen, seien die 12 Argumente u_i, v_i, w_i, x_i, $i = 1, 2, 3$ auf der Einheitskugel so gewählt, daß

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

ausfällt. Ist dann

$$B \equiv \begin{vmatrix} H(u_1, u_2, u_3) & u_1 & u_2 & u_3 \\ H(v_1, v_2, v_3) & v_1 & v_2 & v_3 \\ H(w_1, w_2, w_3) & w_1 & w_2 & w_3 \\ H(x_1, x_2, x_3) & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

so kann man eines der 12 Argumente so variieren lassen, daß D beide Vorzeichen annimmt, B dagegen wegen der Stetigkeit von H noch sein Vorzeichen bewahrt. Daher kann also IV^* nur dann erfüllt sein, wenn bei jedem Verschwinden von D auch B verschwindet.

Das Verschwinden von D bedeutet nun, daß die vier Punkte (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3) und (x_1, x_2, x_3) auf der Einheitskugel in einer Ebene liegen, oder daß die Tangentenebenen an die Einheitskugel an diesen vier Punkten durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Das Verschwinden von B sagt aus, daß die Ebene

$$u_1 \xi + u_2 \eta + u_3 \zeta = H(u_1, u_2, u_3)$$

mit den drei für v, w, x entsprechend gebildeten Ebenen einen gemeinsamen Punkt hat; diese vier Ebenen sind den eben erwähnten vier Tangentenebenen der Einheitskugel bzw. parallel. Nun erfüllt jede Stützebenenfunktion $H(u_1, u_2, u_3)$ eines konvexen Körpers die Bedingungen I*, II*, III*, dagegen erkennt man an den einfachsten Beispielen, daß es konvexe Körper gibt, deren Stützebenen nicht stets durch einen gemeinsamen Punkt gehen, sobald die ihnen parallelen Tangentenebenen der Einheitskugel durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Die Stützebenenfunktion eines solchen konvexen Körpers erfüllt also IV* *nicht*.

6. Nun sei $H(u_1, u_2, u_3)$ eine Funktion, die I*, II*, IV* und folglich nach § 4 auch III* erfüllt. Sie ist Stützebenenfunktion eines konvexen Bereichs K, von dem wir behaupten, daß er nur eine *Kugel* sein kann, die auch in einen Punkt ausarten kann[2]). Ist P ein Punkt außerhalb von K, so gibt es durch P im allgemeinen drei linear unabhängige Stützebenen an K. Dies trifft nur dann nicht zu; wenn erstens K aus einem einzigen Punkt besteht, in welchem Falle bei jeder Wahl von P drei Stützebenen durch P an K linear abhängig sind, oder wenn zweitens K eine Strecke ist und dabei P in der geraden Verlängerung dieser Strecke liegt. Wenn K aber kein einzelner Punkt ist, so sei P ein solcher Punkt außerhalb von K, durch den es drei linear unabhängige Stützebenen an K gibt. Zu jeder dieser Stützebenen werde an die Einheitskugel die parallele Tangentenebene gelegt (und zwar diejenige, die die Einheitskugel auf derselben Seite läßt wie die ihr parallele Tangentenebene den Bereich K). Der Schnittpunkt dieser drei (gleichfalls linear unabhängigen) Tangentenebenen heiße Π. Durch Π sei eine variable Tangentenebene Σ an die Kugel gelegt. Die ihr parallele Stützebene S an K muß dann durch P gehen wegen der Gültigkeit von IV*. Bei ihrer Bewegung umhüllt Σ einen geraden Kreiskegel mit der Spitze Π, folglich umhüllt S einen geraden Kreiskegel mit der Spitze P. Das bedeutet aber, daß K von P aus in einem geraden Kreiskegel projiziert wird. Folglich kann K keine Strecke sein, und wenn K nicht aus einem einzigen Punkt besteht, so wird K also von *jedem* Punkte des Raumes aus in einem geraden Kreiskegel projiziert. Ein konvexer Bereich K von dieser Eigenschaft muß

---

[2]) Daß jede den Bedingungen I*, II*, III* genügende Funktion die Stützebenenfunktion eines konvexen Bereiches ist, hat **Minkowski** nur unter einer weiteren Voraussetzung über die Positivität von $H(u_1, u_2, u_3) + H(-u_1, -u_2, -u_3)$ bewiesen (Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffes, Gesammelte Abhandlungen II, S. 131—229, insbesondere S. 150—153). Einen ohne jede Einschränkung gültigen Beweis habe ich in den Sitzungsberichten der Berliner Mathem. Ges. **20**, S. 14—19 angegeben.

aber, wie man leicht einsieht, eine *Kugel* sein[3]). Wenn es also überhaupt eine Funktion $H(u_1, u_2, u_3)$ gibt, die I*, II* und IV* Genüge leistet, so kann H nur die Stützebenenfunktion einer Kugel oder eines Punktes sein. Daß nun eine solche Stützebenenfunktion in der Tat die erwähnten Bedingungen erfüllt, sieht man leicht geometrisch ein. Ist nämlich K ein einzelner Punkt, so sind vier Stützebenen stets linear abhängig und $B \equiv 0$. Ist K eine Kugel, so sind das aus vier Tangentenebenen an die Einheitskugel gebildete Tetraeder und das Tetraeder aus vier parallelen Stützebenen an K stets einander ähnlich und *gleich orientiert*. Folglich verschwinden nicht nur B und D simultan (was nach unseren Überlegungen ohnehin notwendig ist), sondern sie weisen stets das gleiche Vorzeichen auf, so daß $B \cdot D \geqq 0$ erfüllt ist. Das Gleichheitszeichen gilt identisch nur für den Fall, daß K aus einem Punkt besteht.

7. Leichte Rechnungen zeigen, daß die Stützebenenfunktion der Kugel $(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2 = r^2$

$$H(u_1, u_2, u_3) \equiv r\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} + a u_1 + b u_2 + c u_3$$

ist (Wurzel positiv gemeint). Diese von nur vier willkürlichen Konstanten $r \geqq 0, a, b, c$ abhängende Funktion ist also die einzige Lösung von I*, II*, IV*.

Die Tatsache, daß eine Ungleichung wie IV* eine Funktion so weit bestimmen kann, tritt noch deutlicher hervor, wenn man sich der beiden Bedingungen I* und II* entledigt. Die Ungleichung IV* schreibt ja wegen ihrer Nebenbedingung $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ usw. nur eine Eigenschaft von $H(u_1, u_2, u_3)$ auf der Einheitskugel vor. Es sei nun eine Funktion $H(u_1, u_2, u_3)$ *nur* auf der Einheitskugel gegeben unter Erfüllung von IV*. Dann erlauben die beiden Gleichungen I* und II* auf eine und nur eine Weise eine Fortsetzung von H im ganzen Raum. Und zwar wissen wir, daß die fortgesetzte Funktion auch III* erfüllen wird und stetig sein wird. Die Ungleichung IV* allein schreibt also schon auf der Einheitskugel Stetigkeit von H vor.

Beschränkt man sich also unter Beiseitelassen von I* und II* auf die Einheitskugel, zu welchem Zwecke wir Polarkoordinaten einführen wollen, so haben wir das Resultat:

Die funktionale Ungleichung

$$\begin{vmatrix} H(\varphi_1, \psi_1) & \sin\varphi_1\cos\psi_1 & \sin\varphi_1\sin\psi_1 & \cos\varphi_1 \\ H(\varphi_2, \psi_2) & \sin\varphi_2\cos\psi_2 & \sin\varphi_2\sin\psi_2 & \cos\varphi_2 \\ H(\varphi_3, \psi_3) & \sin\varphi_3\cos\psi_3 & \sin\varphi_3\sin\psi_3 & \cos\varphi_3 \\ H(\varphi_4, \psi_4) & \sin\varphi_4\cos\psi_4 & \sin\varphi_4\sin\psi_4 & \cos\varphi_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \sin\varphi_1\cos\psi_1 & \sin\varphi_1\sin\psi_1 & \cos\varphi_1 \\ 1 & \sin\varphi_2\cos\psi_2 & \sin\varphi_2\sin\psi_2 & \cos\varphi_2 \\ 1 & \sin\varphi_3\cos\psi_3 & \sin\varphi_3\sin\psi_3 & \cos\varphi_3 \\ 1 & \sin\varphi_4\cos\psi_4 & \sin\varphi_4\cos\psi_4 & \cos\varphi_4 \end{vmatrix}$$

[3]) Siehe z. B. Tadahiko Kubota, Einfache Beweise eines Satzes über die konvexe geschlossene Fläche, Tôhoku Science Reports 3 (1914), 235–255

ird nur erfüllt durch die Funktion

$$H(\varphi, \psi) = r + a \sin\varphi \cos\psi + b \sin\varphi \sin\psi + c \cos\varphi \text{ mit } r \geqq 0.$$

agegen haben wir zu Beginn dieser Untersuchung festgestellt, daß die nktionale Ungleichung

$$\begin{vmatrix} H(\varphi_1) & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ H(\varphi_2) & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ H(\varphi_3) & \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ 1 & \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix} \geqq 0$$

on der „Stützwinkelfunktion" eines jeden ebenen konvexen Bereiches füllt wird.

23. April 1921.

(Eingegangen am 2. Mai 1921.)

Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Von

G. Szegö in Berlin.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit enthält Anwendungen eines schönen und wenig bekannten Satzes von Grace[1]), der folgendermaßen lautet:

Es seien

$$A(x) \equiv a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0,$$

$$B(x) \equiv b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \binom{n}{2} b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0$$

zwei algebraische Gleichungen, deren Koeffizienten der „Apolaritätsbedingung"

$$a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n b_0 = 0$$

unterworfen sind[2]). *Dann enthält jeder Kreisbereich, der sämtliche Wurzeln der einen Gleichung einschließt, auch Wurzeln der anderen Gleichung*[3]).

Aus diesem Satz folgt unmittelbar der folgende:

Es sei

$$A(x) \equiv a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

eine algebraische Gleichung, deren Wurzeln im Einheitskreise liegen, und

$$B(x) \equiv b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \binom{n}{2} b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0$$

---

[1]) J. H. Grace, The zeros of a polynomial. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 11 (1900–1902), S. 352–357.

[2]) Solche Gleichungen bezeichne ich im folgenden kurz als apolar

[3]) Bezüglich der Bezeichnung „Kreisbereich" vgl. man § 1.

ne Gleichung, deren Wurzeln im Innern des Einheitskreises liegen. ann ‚liegen auch sämtliche Wurzeln der durch „Komposition" ent-andenen Gleichung

$$C(x) \equiv a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 x + \binom{n}{2} a_2 b_2 x^2 + \ldots + a_n b_n x^n = 0$$

n Innern des Einheitskreises.

In der Tat, wäre

$$C(\xi) = 0,$$

obei $|\xi| \geqq 1$ ist, dann wären offenbar die Gleichungen $A(x) = 0$ und

$$b_n \xi^n - \binom{n}{1} b_{n-1} \xi^{n-1} x + \ldots + (-1)^n b_0 x^n \equiv x^n B\left(-\frac{\xi}{x}\right) = 0$$

apolar". Es müßte also der Einheitskreis (der sämtliche Wurzeln von $A(x) = 0$ einschließt) auch wenigstens eine Wurzel der Gleichung

$$x^n B\left(-\frac{\xi}{x}\right) = 0$$

nthalten; sämtliche Wurzeln dieser Gleichung liegen aber (laut Voraus-etzung) außerhalb des Einheitskreises. Daraus folgt, daß $C(\xi)$ nicht leich 0 sein kann; w. z. b. w. [4])

In den nachfolgenden Zeilen wird gezeigt, daß der Gracesche Satz in äußerst brauchbares Hilfsmittel zur Erledigung von Problemen liefert, ie sich auf die Verteilung der Wurzeln algebraischer Gleichungen be-iehen. Auch manche Sätze, die bisher mit anderen Methoden erhalten urden, lassen sich auf diesem Wege wiedergewinnen.

In § 1 gebe ich für den Graceschen Satz einen neuen Beweis an, er jedoch auf ähnlichen Prinzipien beruht wie der Gracesche Beweis, ur ist er vollständig elementar und befreit von allen invariantentheo-etischen Begriffen, von denen Grace a. a. O.[1]) Gebrauch macht. In § 2 üge ich einige Bemerkungen zu diesem Beweise hinzu. In § 3 behandle ch eine bereits von Grace und Heawood (a. a. O. [18])) untersuchte Frage-tellung und verschärfe ihre Resultate. §§ 4 und 5 enthalten einige ana-oge Aufgaben. In § 6 wird ein Satz von Laguerre[5]) bewiesen und etwas allgemeiner formuliert, woraus sich einige bemerkenswerte Folge-ungen ergeben, die mit dem Gaußschen Satze (über die Nullstellen der Ableitung eines Polynoms) zusammenhängen. In § 7 beweise ich einige Sätze über die Wurzeln der Abschnitte eines Polynoms. In § 8 fasse ich

[4]) Diese Sätze sind auch von Herrn J. Egerváry bewiesen worden in einer Arbeit, die ungarisch erscheinen wird. Sein Beweis stützt sich auf ähnliche Betrach-tungen, wie sie von Heawood für einen spezielleren Satz angewendet worden sind. (Vgl. a. a. O. [15]).)

[5]) Vgl. a. a. O. [25]).

einige weitere Bemerkungen (insbesondere Erweiterungen, Verallgemeinerungen, andere Formulierungen usf.) des in § 1 bewiesenen Satzes zusammen. § 9 enthält einen Satz über trinomische Gleichungen. In § 10 streife ich endlich kurz den Zusammenhang mit einem Satz von Alexander und Kakeya[6]) über Polynome, die ein schlichtes Bild des Einheitskreises entwerfen; ich gebe ferner einige Kompositionssätze über „schlichte" Polynome.

Inhalt.

§ 1. Der Faltungssatz.
§ 2. Bemerkungen zum Faltungssatze.
§ 3. Über den Grace-Heawoodschen Satz.
§ 4. Ein Satz über die Wurzeln eines Polynoms.
§ 5. Über lineare Aggregate von Legendreschen und Tschebyscheffschen Polynomen.
§ 6. Über einen Satz von Laguerre.
§ 7. Über die Wurzeln der Abschnitte eines Polynoms.
§ 8. Weitere Bemerkungen zum Faltungssatze.
§ 9. Anwendung auf trinomische und verwandte Gleichungen.
§ 10. Über Polynome, die ein schlichtes Bild des Einheitskreises entwerfen.

§ 1.

Der Faltungssatz.

1. Wir wollen unsere Überlegungen an einen Satz (Faltungssatz) anknüpfen, der im Grunde genommen mit dem in der Einleitung formulierten Graceschen Satze äquivalent ist[7]).

Man bezeichne mit $S_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oder kurz mit S_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n;$ $S_0 = 1)$ die elementaren symmetrischen Funktionen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, d. h.

$$S_0 = 1, \quad S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n, \quad \ldots,$$
$$S_n = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Man ordne zu jeder algebraischen Gleichung

$$(1) \qquad A(x) \equiv a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

die „*Faltungsgleichung*"

$$(1') \qquad A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv a_0 S_0 + a_1 S_1 + a_2 S_2 + \ldots + a_n S_n = 0$$

zu. Es ist offenbar

$$A(x, x, \ldots, x) = A(x).$$

---

[6]) Vgl. a. a. O. [34])

[7]) Betreffs des Faltungssatzes vgl. auch J. Egerváry, a. a. O. [4]).

Im folgenden bezeichne ich als „*Kreisbereich*“ einen solchen Teil er Ebene, welcher durch einen Kreis oder eine Gerade abgegrenzt ist. Unter einem Kreisbereich kann also folgendes verstanden werden:

a) Der abgeschlossene Innenbereich eines Kreises.

b) Der abgeschlossene Außenbereich eines Kreises.

c) Eine abgeschlossene Halbebene.

Werden nur innere Punkte des Kreisbereiches betrachtet, so wird ies immer besonders hervorgehoben [8]).

Es lautet nun der

Faltungssatz: *Es sei*

$$A(x) \equiv a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

ine algebraische Gleichung, deren Wurzeln alle in einem Kreisbereiche K iegen, und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sei ein Wertsystem, welches der Faltungs-leichung

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv a_0 S_0 + a_1 S_1 + a_2 S_2 + \ldots + a_n S_n = 0$$

enügt. Dann können nicht alle Zahlen x_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) außerhalb on K liegen.

Hierbei wird in den Fällen b) und c) auch der Wert $a_n = 0$ zu-elassen (vgl. Fußnote [8])).

2. Wir beweisen diesen Satz mit vollständiger Induktion. Zunächst ilt der Satz für $n = 1$, da in diesem Falle die Faltungsgleichung mit er ursprünglichen identisch ist. Es sei also $n > 1$ und sei vorausgesetzt, aß der Satz für Gleichungen $(n-1)$-ten Grades bereits bewiesen ist. Zu beweisen ist, daß er auch für die vorgelegte Gleichung n-ten Grades gilt.

---

[8]) Liegen sämtliche Wurzeln einer algebraischen Gleichung von der Form (1) in einem Kreisbereiche von der Art a), dann wird der höchste Koeffizient der Gleichung (d. h. der Koeffizient von x^n) stets als von 0 verschieden vorausgesetzt. (In den beiden anderen Fällen muß dies nicht notwendig der Fall sein.) Diese Feststellung steht im Einklang damit, daß das Verschwinden des höchsten Koeffizienten mit dem Vorhandensein einer Wurzel $x = \infty$ gleichwertig ist.

Ähnlich sage ich, daß die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \infty$ der Faltungsgleichung genügen, wenn die Gleichung

$$\lim_{x_n = \infty} \frac{A(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}{x_n}$$

für $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ erfüllt wird.

Ich betrachte übrigens immer solche Gleichungen, die auch von 0 verschiedene Koeffizienten besitzen.

3. Es liege nämlich etwa die letzte Zahl $x_n = \xi$ außerhalb des Kreisbereiches K[9]). Ich werde beweisen, daß dann die übrigen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ einer Gleichung genügen, die sich als eine zu einer Gleichung $(n-1)$-ten Grades gehörige Faltungsgleichung auffassen läßt. Wenn ich beweisen kann, daß diese letzte Gleichung alle ihre Wurzeln in K hat, dann folgt aus der vorausgesetzten Richtigkeit unserer Behauptung für Gleichungen $(n-1)$-ten Grades, daß es unter den Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ wenigstens eine x_ν gibt, welche in K liegt.

Zu diesem Zwecke bezeichne man mit

$$s_\nu = s_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

die elementaren symmetrischen Funktionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Dann gelten offenbar die Relationen

$$S_\nu = s_\nu + \xi s_{\nu-1} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n;\ s_{-1} = s_n = 0)$$[10])

Man hat also

$$\sum_{\nu=0}^{n} (s_\nu + \xi s_{\nu-1}) a_\nu = 0,$$

d. h.

$$\sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu + \xi a_{\nu+1}) s_\nu = 0.$$

Dies ist aber genau die Faltungsgleichung, die zu der Gleichung $(n-1)$-ten Grades

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} (a_\nu + \xi a_{\nu+1}) x^\nu = 0$$

gehört[11]). Alles geht also darauf hinaus, folgenden Hilfssatz zu beweisen:

Hilfssatz. *Es sei*

$$A(x) \equiv a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

eine algebraische Gleichung n-ten Grades, deren Wurzeln im Kreisbereiche K liegen. Es liege ferner ξ außerhalb von K. Dann hat die Gleichung $(n-1)$-ten Grades

$$A(x) \equiv a_0 + \xi a_1 + \binom{n-1}{1} (a_1 + \xi a_2) x + \ldots + (a_{n-1} + \xi a_n) x^{n-1} = 0$$

alle ihre Wurzeln im Kreisbereiche K.

---

[9]) ξ kann auch ∞ sein.

[10]) Ist $\xi = \infty$, so sollen diese Gleichungen, im Einverständnis mit den früheren Festsetzungen, so gelesen werden: $s_{\nu-1} = 0$.

[11]) Diese Gleichung entsteht aus der vorigen, indem dort $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = x$, d. h. $s_\nu = \binom{n-1}{\nu} x^\nu$ gesetzt wird.

4. Wir wollen zunächst den Ausdruck $\mathsf{A}(x)$ einer leichten Umformung nterwerfen. Man betrachte die zu der gegebenen Gleichung $A(x) = 0$ reziproke" Gleichung

$$A^*(x) \equiv x^n A\left(\frac{1}{x}\right) = a_n + \binom{n}{1} a_{n-1} x + \ldots + a_0 x^n = 0.$$

ann ist offenbar

$$\frac{A'(x)}{n} = a_1 + \binom{n-1}{1} a_2 x + \binom{n-1}{2} a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1}$$

nd

$$\frac{A^{*\prime}(x)}{n} = a_{n-1} + \binom{n-1}{1} a_{n-2} x + \binom{n-1}{2} a_{n-3} x^2 + \ldots + a_0 x^{n-1},$$

. h.

$$\frac{x^{n-1} A^{*\prime}\left(\frac{1}{x}\right)}{n} = a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 x + \binom{n-1}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

Ian hat somit

$$n\,\mathsf{A}(x) = x^{n-1} A^{*\prime}\left(\frac{1}{x}\right) + \xi A'(x).$$

s zeigt ferner eine leichte Rechnung, daß

$$x^{n-1} A^{*\prime}\left(\frac{1}{x}\right) = n A(x) - x A'(x)$$

t, also

$$n\,\mathsf{A}(x) = n A(x) - x A'(x) + \xi A'(x).$$

5. Es sei nun x (ebenso wie ξ) eine Zahl außerhalb des Kreis- ereiches K. Ich werde dann beweisen, daß

2) $$n A(x) - x A'(x) + \xi A'(x) \neq 0$$

t[12]). Man hat zunächst $A(x) \neq 0$, so daß die Behauptung (2) mit er folgenden äquivalent ist:

2′) $$n + (\xi - x)\frac{A'(x)}{A(x)} \neq 0.$$

s seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Wurzeln von $A(x)$, die laut Voraussetzung lle in K liegen. Dann ist

$$n + (\xi - x)\frac{A'(x)}{A(x)} = n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\xi - x}{x - z_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\xi - z_\nu}{x - z_\nu}.$$

Man betrachte nun die Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene urch folgende Funktion:

3) $$w = \frac{\xi - z}{x - z},$$

[12]) Ist $\xi = \infty$, so bedeutet dies: $A'(x) \neq 0$. — Die Behauptung (2) ist eigentlich it einem Theorem von Laguerre gleichwertig. Vgl. a. a. O. [25]).

wobei ξ und x zwei Parameter bezeichnen, die außerhalb von K liegen[13]). Der Kreisbereich K geht dann wieder in einen solchen, etwa in K' über, u. zw. enthält K' weder den Punkt $w=0$, noch den Punkt $w=\infty$, da ja ξ und x *außerhalb* von K liegen. Daraus folgt, daß K' nur der abgeschlossene Innenbereich eines Kreises sein kann, welcher den Nullpunkt nicht enthält. Nun liegen aber sämtliche Zahlen

$$w_\nu = \frac{\xi - z_\nu}{x - z_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in K', also auch ihr arithmetisches Mittel; ihre Summe kann also nicht gleich 0 sein. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 2.

Bemerkungen zum Faltungssatze.

6. Aus dem Faltungssatz folgt offenbar der in der Einleitung ausgesprochene Gracesche Satz. In der Tat, sind die Wurzeln der Gleichung

$$B(x) \equiv b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \binom{n}{2} b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, dann ist

$$(-1)^\nu \binom{n}{\nu} b_{n-\nu} = \lambda S_\nu(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

wobei λ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet. Sind also $A(x)$ und $B(x)$ apolar (vgl. Einleitung), so genügen die Zahlen

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

der zu $A(x)$ gehörigen Faltungsgleichung. Daraus folgt schon der

Satz 1 (von Grace). *Es seien*

$$A(x) \equiv a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0,$$

$$B(x) \equiv b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \binom{n}{2} b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0$$

zwei algebraische Gleichungen, deren Koeffizienten der Bedingung

$$a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n b_0 = 0$$

genügen. Die Wurzeln der zweiten Gleichung seien

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n.$$

Dann liegt in jedem Kreisbereiche K, der sämtliche Wurzeln von $A(x)$ einschließt, wenigstens eine der Zahlen β_ν.

---

[13]) Ist $\xi = \infty$, so tritt $w = \frac{1}{x - z}$ an Stelle von (3).

Es seien ferner $A(x)$ und $B(x)$ beliebig und ξ eine Wurzel der rch Komposition entstandenen Gleichung

$$C(x) \equiv a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 x + \binom{n}{2} a_2 b_2 x^2 + \ldots + a_n b_n x^n = 0$$

d es sei ξ weder 0 noch unendlich, d. h. $a_0 b_0 \neq 0$ und $a_n b_n \neq 0$; dann d auch sämtliche $\beta_\nu \neq 0$. Die Gleichungen

$$A(x) = 0 \quad \text{und} \quad x^n B\left(-\frac{\xi}{x}\right) = 0$$

d ferner apolar (vgl. Einleitung), so daß wenigstens eine der Wurzeln

$$-\frac{\xi}{\beta_1}, -\frac{\xi}{\beta_2}, \ldots, -\frac{\xi}{\beta_n}$$

r zweiten Gleichung in dem Kreisbereiche K liegt; d. h.

$$-\frac{\xi}{\beta_\nu} = k \quad \text{oder} \quad \xi = -\beta_\nu k,$$

obei k einen Punkt von K bezeichnet. Dies bleibt offenbar auch dann ltig, wenn $\xi = 0$ oder unendlich ist. Es gilt also der

Satz 2. *Es sei*

$$A(x) \equiv a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

ne algebraische Gleichung, deren sämtliche Wurzeln in einem Kreis-reiche K liegen. Es sei ferner

$$B(x) \equiv b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \binom{n}{2} b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0$$

ne beliebige Gleichung mit den Wurzeln

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n.$$

ann hat jede Wurzel ξ der durch Komposition entstandenen Gleichung

$$C(x) \equiv a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 x + \binom{n}{2} a_2 b_2 x^2 + \ldots + a_n b_n x^n = 0$$

e folgende Form

$$\xi = -\beta_\nu k,$$

obei ν einen gewissen Index, k einen gewissen Punkt im Kreisbereiche K zeichnet[14]).

7. Aus dem eben bewiesenen Satze folgt unmittelbar der in der nleitung ausgesprochene „Kompositionssatz", sogar ein analoger Satz r solche Gleichungen, deren Wurzeln außerhalb oder am Rande bzw. ßerhalb des Einheitskreises liegen.

[14]) Auf diese Formulierung des Faltungssatzes hat mich Herr I. Schur auf-rksam gemacht.

Im folgenden bezeichne ich der Kürze halber als (E)- bzw. $(\bar{E})$-Gleichungen solche algebraische Gleichungen, deren Wurzeln im Innern bzw. im Innern oder am Rande des Einheitskreises liegen. Ähnlich definiere ich die (A)- bzw. $(\bar{A})$-Gleichungen für das Äußere des Einheitskreises. Unter (R)-Gleichungen verstehe ich endlich solche, deren sämtliche Wurzeln auf dem Einheitskreise selbst liegen. Da eine solche Gleichung sich gleichzeitig als $(\bar{E})$- und als $(\bar{A})$-Gleichung auffassen läßt, gilt der folgende

Satz 3. *Es sei*

$$A(x) \equiv a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

eine (E)-, (A)- bzw. (R)-Gleichung, und

$$B(x) \equiv b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \binom{n}{2} b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0$$

eine $(\bar{E})$-, $(\bar{A})$- bzw. (R)-Gleichung. Dann ist auch die durch Komposition entstandene Gleichung

$$C(x) \equiv a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 x + \binom{n}{2} a_2 b_2 x^2 + \ldots + a_n b_n x^n = 0$$

eine (E)-, (A)- bzw. (R)-Gleichung[15]).

Ferner:

Satz 3′. *Es seien die Wurzeln der algebraischen Gleichung*

$$A(x) \equiv a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

alle dem absoluten Betrage nach kleiner (größer) als r und die von

$$B(x) \equiv b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \binom{n}{2} b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0$$

dem absoluten Betrage nach nicht größer (nicht kleiner) als ϱ. Dann sind die Wurzeln der durch Komposition entstandenen Gleichung

$$C(x) \equiv a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 x + \binom{n}{2} a_2 b_2 x^2 + \ldots + a_n b_n x^n = 0$$

alle dem absoluten Betrage nach kleiner (größer) als $r\varrho$.

---

[15]) Vgl. Egerváry, a. a. O.[4]). — An dieser Stelle erwähne ich, daß auch Herr A. Cohn einen Beweis für Satz 3 gegeben hat, der — kurz skizziert — auf dem folgenden Gedanken beruht: Er wirft mit Hilfe einer linearen Transformation des Einheitskreises in sich die eine Wurzel der gegebenen (E)-Gleichung in den Nullpunkt hinein, wodurch die sog. algebraische Invariante der gegebenen Gleichungen sich nicht wesentlich ändert und sich anderseits die unmittelbare Möglichkeit bietet, die Behauptung auf Gleichungen $(n-1)$-ten Grades zurückzuführen.

Liegen sämtliche Wurzeln der ersten und zweiten Gleichung auf dem Kreise mit dem Radius r bzw. ϱ, so liegen sämtliche Wurzeln der durch Komposition entstandenen dritten Gleichung auf dem Kreise vom Radius $r\varrho$.

8. Herr Schur hat zu diesen Überlegungen folgende Bemerkungen hinzugefügt.

Es sei H irgendeine Halbebene, die den Nullpunkt enthält und die Zahlen

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

seien sämtlich reell und sollen im Intervalle $(-1, 0)$ liegen. Dann liegen die Zahlen

$$-\beta_\nu h,$$

wobei h irgendeinen Punkt in der Halbebene H bezeichnet, ebenfalls in H.

Es sei also $\mathfrak{K}$ irgendein konvexer Bereich, der den Nullpunkt enthält und die Zahlen

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

seien sämtlich reell und sollen im Intervalle $(-1, 0)$ liegen. Dann liegen die Zahlen

$$-\beta_\nu k,$$

wobei k einen Punkt von $\mathfrak{K}$ bezeichnet, ebenfalls in $\mathfrak{K}$.

Daraus folgt der folgende Kompositionssatz:

Satz 4. *Es sei*

$$A(x) \equiv a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

eine algebraische Gleichung, deren sämtliche Wurzeln in einem konvexen Bereiche $\mathfrak{K}$, welcher den Nullpunkt enthält, liegen und

$$B(x) \equiv b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \binom{n}{2} b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0$$

habe lauter reelle und im Intervalle $(-1, 0)$ liegende Wurzeln. Dann liegen die Wurzeln der Gleichung

$$C(x) \equiv a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 x + \binom{n}{2} a_2 b_2 x^2 + \ldots + a_n b_n x^n = 0$$

ebenfalls in dem konvexen Bereiche $\mathfrak{K}$.

Insbesondere ergibt sich daraus:

Satz 4'. *Es seien die Wurzeln der algebraischen Gleichung*

$$A(x) \equiv a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

sämtlich reell und im Intervalle $(-a, a)$ enthalten. Es seien ferner die Wurzeln von

$$B(x) \equiv b_0 + \binom{n}{1} b_1 x + \binom{n}{2} b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0$$

ebenfalls reell und von gleichem Vorzeichen, und zwar sollen sie entweder im Intervalle $(-b, 0)$ *oder im Intervalle* $(0, b)$ *liegen. Dann sind die Wurzeln der Gleichung*

$$C(x) \equiv a_0 b_0 + \binom{n}{1} a_1 b_1 x + \binom{n}{2} a_2 b_2 x^2 + \ldots + a_n b_n x^n = 0$$

ebenfalls reell und liegen sämtlich im Intervalle $(-ab, ab)$.

Für den Fall $a = b = \infty$ hat diesen Satz auch Herr Egerváry gefunden[16]). Aus diesem Satze ergeben sich ohne Mühe auch die „Kompositionssätze" von Malo und Schur[17]).

9. Bevor ich auf die Anwendungen übergehe, will ich die Form von Satz 1 leicht modifizieren. Die Äquivalenz der beiden Formulierungen ist auf den ersten Blick einleuchtend.

Satz 1′. *Es seien* $l_0, l_1, \ldots, l_n$ *gegebene Konstanten, die nicht sämtlich verschwinden, und*

$$a(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

sei eine algebraische Gleichung, deren Koeffizienten der Bedingung

$$(L) \qquad l_0 a_n + l_1 a_{n-1} + \ldots + l_n a_0 = 0$$

genügen. Dann liegt wenigstens eine der Wurzeln von $a(x) = 0$ *in jedem Kreisbereiche, der sämtliche Wurzeln der Gleichung*

$$(4) \qquad l_0 - \binom{n}{1} l_1 z + \binom{n}{2} l_2 z^2 - \ldots + (-1)^n l_n z^n = 0$$

enthält.

Die Gleichung (4) *in* z *entsteht offenbar aus der Bedingungsgleichung* (L), *indem* $a(x) \equiv (x - z)^n$ *gesetzt wird, wobei* z *einen Parameter bezeichnet.*

Bezüglich der Bezeichnung „Kreisbereich" sei auf die Definition in § 1 gewiesen.

---

[16]) A. a. O. [4]). — Durch diesen Satz ist eine Fragestellung von Laguerre [Oeuvres 1 (1898), S. 199–200] endgültig erledigt. Vgl. noch G. Pólya, Question 4240 [Interméd. des math. 20 (1913), S. 145–146], wo der Satz als Vermutung formuliert ist.

[17]) Vgl. auch Egerváry, a. a. O. [4]). — J. Schur, Zwei Sätze über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln [Journ. f. d. reine u. angewandte Mathematik, 144 (1914), S. 75–88], sowie auch G. Pólya und J. Schur, Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen (Ebenda, S. 89–113).

§ 3.

Über den Grace-Heawoodschen Satz.

10. Der Satz, auf den Grace sein Theorem angewendet hat und den später unabhängig von ihm auch Heawood bewiesen hat[18]), lautet:

Ein Polynom n-ten Grades nehme für $x = -1$ *und* $x = 1$ *die gleichen Werte an. Dann verschwindet die Ableitung in einem Kreise, der um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit dem Radius* $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ *geschlagen wird.*

Grace hat noch hinzugefügt, daß *die Ableitung in beiden Halbebenen rechts und links von der imaginären Achse verschwindet*[19]).

Dieser Satz ist eine Übertragung des (im Reellen gültigen) Rolleschen Theorems auf komplexes Gebiet. Daß das Rollesche Theorem im Komplexen nicht gilt, zeigt schon das Beispiel der Funktion e^x, für welche $e^{i\pi} = e^{-i\pi}$ ist und doch $(e^x)' = e^x \neq 0$ ist.

Wir wollen nun mit Hilfe von Satz 1 (vgl. § 2) die Frage nach der Lage der Wurzeln der Ableitung eines Polynoms von der genannten Eigenschaft genauer diskutieren.

Die Fragestellung ist offenbar mit der folgenden äquivalent: Es sei

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

irgendein Polynom $(n-1)$-ten Grades und

$$(L) \qquad \int_{-1}^{1} a(t)\,dt = 2a_0 + \tfrac{2}{3}a_2 + \tfrac{2}{5}a_4 + \ldots = 0.$$

Wo liegen dann die Wurzeln von $a(x)$[20])?

Dies ist eine lineare Bedingung von der Form (L) (vgl. § 2), wobei n durch $n-1$ ersetzt wird. Man setze also nach Satz 1′

$$a(x) = (x - z)^{n-1},$$

dann erhält man folgende Gleichung $(n-1)$-ten Grades in z

$$\int_{-1}^{1} (t - z)^{n-1}\,dt = \frac{(1-z)^n - (-1-z)^n}{n}.$$

Die Wurzeln derselben sind, wie eine leichte Rechnung zeigt,

$$z_\nu = i \operatorname{ctg}\frac{\nu\pi}{n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)\,[21]).$$

---

[18]) P. J. Heawood, Geometrical relations between the roots of $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ [Quarterly Journal of Mathematics, 38 (1907), S. 84–107].

[19]) A. a. O. [1]), S. 356.

[20]) Vgl. Grace, a. a. O. [1]), Heawood, a. a. O. [18]).

[21]) Vgl. Grace, a. a. O. [1]), Heawood, a. a. O. [18]).

Daraus ergibt sich unmittelbar der

Satz 5. *Ein Polynom n-ten Grades nehme für $x=-1$ und $x=1$ die gleichen Werte an. Dann verschwindet seine Ableitung in jedem Kreise, welcher durch die Punkte $\pm i \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ hindurchgeht, einbegriffen auch die beiden Halbebenen rechts und links von der imaginären Achse.*

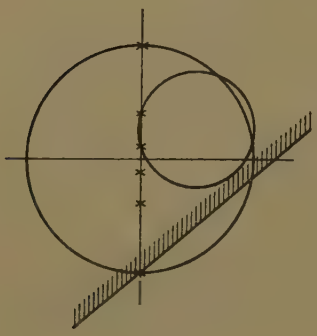


Fig. 1.

Das Polynom verschwindet ferner außerhalb oder am Rande jedes Kreises, welcher bei gegebenem ν durch die Punkte

$$i \operatorname{ctg}\frac{\nu\pi}{n}, \qquad i \operatorname{ctg}\frac{(\nu+1)\pi}{n}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n-2)$$

hindurchgeht. Ist insbesondere n ungerade, so verschwindet es auch außerhalb oder am Rande des Kreises um den Nullpunkt als Mittelpunkt vom Radius $\operatorname{ctg}\frac{n-1}{2}\frac{\pi}{n} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$. (Fig. 1.)

§ 4.

Ein Satz über die Wurzeln eines Polynoms.

11. Man wird auf ganz ähnliche Rechnungen geführt wie im vorigen Paragraphen, wenn man folgende Aufgabe stellt:

Ein Polynom n-ten Grades nehme für $x=-1$ und für $x=1$ die gleichen Werte an. Was läßt sich dann über die Wurzeln des Polynoms selbst aussagen?

Es sei

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

ein beliebiges Polynom n-ten Grades. Dann lautet die Bedingung

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^n a_n,$$

oder

$$(L) \qquad a_1 + a_3 + a_5 + \ldots = 0.$$

Man setze hier $a(x) \equiv (x-z)^n$, dann wird man auf die nämliche Gleichung

$$(1-z)^n = (-1-z)^n$$

geführt, wie im vorigen Paragraphen, nur ist hier diese Gleichung als eine Gleichung vom n-ten Grade aufzufassen. Die Wurzeln sind also

$$\operatorname{ctg}\frac{\nu\pi}{n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

nd eine Wurzel liegt im Unendlichen [22]). Daraus folgt, daß bei Anwenung von Satz 1′ als Kreisbereich nur das Äußere eines Kreises oder eine albebene [die Fälle b), c) in § 1] in Betracht kommen. Es gilt somit der

Satz 6. *Ein Polynom n-ten Grades nehme für $x=-1$ und $x=1$ ie gleichen Werte an. Dann nimmt es den Wert* 0 *(oder irgendeinen rgegebenen Wert a) außerhalb (oder am Rande) jedes Kreises an, der i gegebenem ν durch die beiden Punkte*

$$i \operatorname{ctg} \frac{\nu\pi}{n}, \quad i \operatorname{ctg} \frac{(\nu+1)\pi}{n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-2)$$

ndurchgeht. Dasselbe gilt auch für jede den Nullpunkt enthaltende albebene, deren Begrenzungsgerade durch einen der beiden Punkte $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$ *oder* $-i \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$ *hindurchgeht.* (Fig. 1.)

§ 5.

Über lineare Aggregate von Legendreschen und Tschebyscheffschen Polynomen.

12. Der Grace-Heawoodsche Satz läßt auch die folgende Interetation zu. Sei ein Polynom n-ten Grades

$$a(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x)$$

ach den Legendreschen Polynomen $P_\nu(x)$ geordnet und

$$c_0 = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} a(x)\, dx = 0.$$

ann verschwindet $a(x)$ im Kreise um den Nullpunkt vom Radius $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n+1}$. ind die c_ν reell, dann besitzt $a(x)$ bekanntlich im Intervalle $-1, 1$ ne Wurzel).

Wohlbekannt ist nun der folgende Satz:

Ein trigonometrisches Polynom von der Form

$$g(\vartheta) = c_1 \cos\vartheta + c_2 \cos 2\vartheta + \ldots + c_n \cos n\vartheta,$$

obei die c_ν reell sind, verschwindet für wenigstens einen reellen Wert n ϑ [23]).

Man setze

$$T_n(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta,$$

nn besagt dieser Satz, daß jedes Polynom von der Form

$$a(x) = c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \ldots + c_n T_n(x),$$

[22]) Vgl. Fußnote [5]).

[23]) Dies folgt unmittelbar aus $\int_0^\pi g(\vartheta)\, d\vartheta = 0$.

wobei die c_ν reell sind, verschwindet irgendwo im Intervalle $-1, 1$. Was läßt sich nun über Polynome von dieser Form aussagen, wenn die c_ν komplex sind?

Die Polynome n-ten Grades $a(x)$ sind offenbar dadurch charakterisiert, daß

$$\int_0^\pi a(\cos\vartheta)\,d\vartheta = \int_{-1}^{1} a(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

ist. Diese Bedingung ist linear in den Koeffizienten von $a(x)$, d. h. eine ähnliche Bedingung, wie die Gleichung (L) im § 2. Man setze also $a(x) = (x-z)^n$, dann entsteht ein Polynom in z

$$K_n(z) = \int_{-1}^{1} (x-z)^n \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi (\cos\vartheta - z)^n\,d\vartheta.$$

Es ist nicht schwer, dieses Polynom durch das n-te Legendresche Polynom $P_n(x)$, welches die wohlbekannte Laplacesche Darstellung

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1}\cos\vartheta)^n\,d\vartheta \quad [24])$$

besitzt, auszudrücken. Man setze

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -z,$$

dann ist

$$K_n(z) = \frac{\pi}{(\sqrt{x^2-1})^n} P_n(x).$$

Die Wurzeln z_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ von $K_n(z)$ sind also folgendermaßen zu erhalten: Man bezeichne mit $-1 < \cos\vartheta_n < \cos\vartheta_{n-1} < \ldots < \cos\vartheta_2 < \cos\vartheta_1 < 1$ die Wurzeln von $P_n(x)$. Dann ist

$$z_\nu = -\frac{\cos\vartheta_\nu}{i\sin\vartheta_\nu} = i\operatorname{ctg}\vartheta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Es gilt somit der

Satz 7. *Man bezeichne mit* $\cos\vartheta_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *die Wurzeln des* n*-ten Legendreschen Polynoms in abnehmender Reihenfolge und*

$$a(x) = c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \ldots + c_n T_n(x)$$

bezeichne irgendein lineares Aggregat der Tschebyscheffschen Polynome $T_\nu(x) = \cos\nu \arccos x$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. *Dann verschwindet* $a(x)$ *in jedem Kreise, welcher durch die Punkte* $i\operatorname{ctg}\vartheta_1$ *und* $i\operatorname{ctg}\vartheta_n = -i\operatorname{ctg}\vartheta_1$

[24]) Vgl. etwa E. Heine, Theorie der Kugelfunktionen, Zweite Auflage (Berlin, G. Reimer, 1878), 1, S. 35.

indurchgeht, einbegriffen auch die beiden Halbebenen rechts und links on der imaginären Achse.

Das Polynom verschwindet ferner außerhalb oder am Rande jedes Kreises, der bei gegebenem ν durch die Punkte

$$i \operatorname{ctg} \vartheta_\nu, \qquad i \operatorname{ctg} \vartheta_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-2)$$

indurchgeht. Ist insbesondere n gerade, so verschwindet es auch außerhalb oder am Rande des Kreises um den Nullpunkt vom Radius

$$\operatorname{ctg} \vartheta_{\frac{n}{2}}.$$

§ 6.

Über einen Satz von Laguerre.

13. Ich will nun mit Hilfe von Satz 1′ einen Satz von Laguerre[25]) nd einige interessante Folgerungen desselben ableiten.

Es sei $k(x)$ irgendeine analytische Funktion, die sich an einer Stelle regulär verhält und für welche $k(\xi)$ und $k'(\xi)$ nicht gleichzeitig verchwinden. Ich betrachte sämtliche Polynome n-ten Grades $a(x)$, die er Bedingung

$$L) \qquad \left[\frac{d}{dx} k(x) a(x)\right]_{x=\xi} = 0$$

genügen. Da dies eine lineare Bedingung zwischen den Koeffizienten von (x) ist, können wir Satz 1′ anwenden. Man setze daher $a(x) = (x-z)^n$, lann ist

$$\left[\frac{d}{dx} k(x) a(x)\right]_{x=\xi} = k'(\xi)(\xi - z)^n + n k(\xi)(\xi - z)^{n-1}.$$

Die Wurzeln dieses Polynoms sind: ξ mit der Multiplizität $n-1$ und

$$\frac{\xi k'(\xi) + n k(\xi)}{k'(\xi)} = \xi + n \frac{k(\xi)}{k'(\xi)}$$ [26]).

Es gilt somit der

Satz 8. *In jedem Kreisbereiche, dessen Berandung durch die Punkte*

$$\xi \text{ und } \xi + n \frac{k(\xi)}{k'(\xi)}$$

indurchgeht, besitzt jedes Polynom mit der Eigenschaft (L) eine Wurzel.

---

[25]) Sur la résolution des équations numériques (Nouvelles Annales de Mathématiques), (2) 17 (1878) und Oeuvres de Laguerre, 1 (1898), S. 56—63.

[26]) Ist $k'(\xi) = 0$, so ist diese Wurzel als im unendlich fernen Punkt gelegen aufzufassen.

Setzt man hier $k(x) = \frac{1}{a(x)}$, dann ist (L) immer erfüllt, ferner

$$\frac{k(\xi)}{k'(\xi)} = -\frac{a(\xi)}{a'(\xi)}$$

und das zuletzt ausgesprochene Theorem geht in ein Theorem von Laguerre über[27]).

14. Für die Anwendung ist es wohl zweckmäßiger, den letzten Satz in der folgenden Form auszusprechen:

Satz 8′. *Läßt sich durch die Punkte*

$$\xi \quad \textit{und} \quad \xi + n\frac{k(\xi)}{k'(\xi)}$$

ein Kreis[28]) *legen derart, daß einer der durch ihn begrenzten Kreisbereiche sämtliche Wurzeln des Polynoms n-ten Grades $a(x)$ in seinem Innern enthält, dann muß*

$$\left[\frac{d}{dx} k(x)\, a(x)\right]_{x=\xi}$$

von 0 verschieden sein.

Liegen z. B. sämtliche Wurzeln von $a(x)$ im Einheitskreise und sind die Bedingungen

$$|\xi| > 1, \qquad \left|\xi + n\frac{k(\xi)}{k'(\xi)}\right| > 1 \quad \text{oder} \quad \left|\xi\frac{k'(\xi)}{k(\xi)} + n\right| > \left|\frac{k'(\xi)}{k(\xi)}\right|$$

erfüllt, dann muß

$$\left[\frac{d}{dx} k(x)\, a(x)\right]_{x=\xi}$$

von 0 verschieden sein.

Beispiele. I. $k(x) = e^x$. Die obigen Bedingungen lauten dann

$$|\xi| > 1, \qquad |\xi + n| > 1,$$

d. h. es gilt der

Satz 9. *Eine ganze Funktion von der Form $e^x a(x)$, wobei $a(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist, habe alle ihre Nullstellen im Einheitskreise. Dann liegen die Nullstellen der Ableitung entweder im Einheitskreise oder im Kreise mit dem Mittelpunkt $-n$ und vom Radius 1.*

II. Es sei B irgendein Bereich, der den Einheitskreis enthält und $g(x)$ sei eine in B reguläre analytische Funktion. Man setze $k(x) = e^{g(x)}$; die obige Bedingung

$$|\xi g'(\xi) + n| > |g'(\xi)|$$

---

[27]) A. a. O.[25]). Umgekehrt läßt sich aus diesem Satz von Laguerre der im Text stehende Satz einfach ableiten.

[28]) D. h. Kreis oder Gerade.

t dann für genügend große n im ganzen Bereiche B erfüllt. Es gilt omit der

Satz 10. *Es sei B irgendein Bereich, der den Einheitskreis enthält nd $g(x)$ sei regulär-analytisch in B. Dann gibt es eine (nur von B nd $g(x)$ abhängende) Zahl N derart, daß wenn eine ganze Funktion on der Form*

$$e^{g(x)}a(x),$$

obei der Grad des Polynoms $a(x)$ die Zahl N übersteigt, alle ihre Nullstellen im Einheitskreise besitzt, die Nullstellen ihrer Ableitung entweder im Einheitskreise oder außerhalb von B liegen.

§ 7.

Über die Wurzeln der Abschnitte eines Polynoms.

15. Wir wollen unseren Satz 1′ auf die folgende Fragestellung anwenden.

Ein Polynom n-ten Grades

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

möge in einem Kreisbereiche, welcher den Nullpunkt enthält, nicht verschwinden. Lassen sich dann innerhalb dieses Kreisbereiches Bereiche absondern, in welchen das $(n-1)$-te Abschnittspolynom

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

ebenfalls nicht verschwindet?

Es sei ξ eine Wurzel des letzteren Polynoms, dann lautet die lineare Bedingung

$$(L) \qquad a_0 + a_1 \xi + \ldots + a_{n-1} \xi^{n-1} = 0.$$

Man setze hier $a(x) = (x-z)^n$. Die Bedingung (L) gestaltet sich alsdann folgendermaßen:

$$(\xi - z)^n - \xi^n = 0.$$

Die Wurzeln z_ν dieser Gleichung ergeben sich aus der Gleichung

$$\xi - z_\nu = \xi e^{i\frac{2\pi}{n}\nu},$$

d. h.

$$z_\nu = \xi\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}\nu}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Hieraus folgt der

Satz 11. *Es sei ξ irgendeine Wurzel des Abschnittspolynoms*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

Dann besitzt das Polynom

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

in jedem Kreisbereiche, der sämtliche Punkte

$$\xi\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}\nu}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

enthält, wenigstens eine Wurzel.

Oder:

Satz 11′. *Das Abschnittspolynom*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

ist von 0 verschieden, in jedem Punkte ξ, welcher der folgenden Bedingung genügt: Die Punkte

$$\xi\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}\nu}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

liegen in einem Kreisbereiche, in welchem das Polynom

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

nicht verschwindet.

Da offenbar

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqq \nu \leqq n} |z_\nu| = \begin{cases} 2|\xi| & \text{für gerade } n, \\ 2|\xi| \cos\frac{\pi}{2n} & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

ist, folgt hieraus der

Satz 12. Es sei ξ *eine Wurzel des Abschnittspolynoms*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

Dann besitzt das Polynom

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

stets eine Wurzel in dem Kreise um den Nullpunkt vom Radius $2|\xi|$ bzw. $2|\xi| \cos\frac{\pi}{2n}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Oder:

Satz 12′. *Ein Polynom n-ten Grades*

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

sei im Einheitskreise von 0 verschieden. Dann ist das Abschnittspolynom

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

von 0 verschieden im Kreise um den Nullpunkt vom Radius $\frac{1}{2}$ für gerade n und im Kreise um den Nullpunkt vom Radius $\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{2n}}$ für ungerade n.

Diese Grenzen sind für alle n genau, d. h. sie können durch keine eineren ersetzt werden.

16. Es sei jetzt allgemeiner irgendein Kreisbereich K gegeben, welcher n Nullpunkt enthält und in welchem das Polynom $a(x)$ nicht verschwindet. Die Punkte

$$z_\nu = \xi\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}\nu}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gen offenbar auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt ξ ist und der durch n Nullpunkt hindurchgeht. Zu jedem Punkt ξ gehört ein solcher Kreis d die am Anfang dieses Paragraphen gestellte Frage läßt sich auch so rmulieren, wann (für welche ξ) diese Kreise ganz in K liegen. Der ereich, in welchem dies der Fall ist, wird also durch Punkte begrenzt, e vom Nullpunkt und vom Rande des Kreisbereiches K in gleicher Entrnung liegen.

Die Aufgabe reduziert sich somit auf elementargeometrische Beachtungen, und es ergeben sich unschwer die folgenden Sätze:

Satz 13. *Es sei ein Polynom n-ten Grades in einem Kreise vom ittelpunkt C, der den Nullpunkt O enthält, von* 0 *verschieden. Sein* $(n-1)$*-tes Abschnittpolynom ist dann von* 0 *verschieden in der Ellipse, ren Brennpunkte C und O sind und deren große Achse gleich dem adius des gegebenen Kreises ist.* (Fig. 2.)

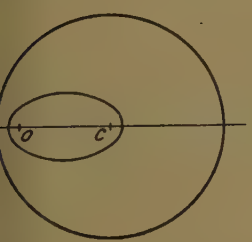


Fig. 2.

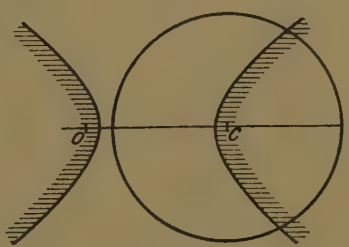


Fig. 3.

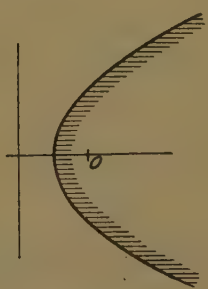


Fig. 4.

Ferner

Satz 14. *Ein Polynom n-ten Grades sei außerhalb und am Rande nes Kreises vom Mittelpunkt C, der den Nullpunkt O nicht enthält, n* 0 *verschieden. Sein* $(n-1)$*-tes Abschnittspolynom ist dann von* 0 *rschieden in den beiden im Unendlichen zusammenhängenden Bereichen r Hyperbel, deren Brennpunkte C und O sind und deren große Achse eich dem Radius des gegebenen Kreises ist.* (Fig. 3.)

Bemerkenswert ist in diesem Falle, daß ein Teil dieses Bereiches gar in den gegebenen Kreis mit dem Mittelpunkt C hineinfällt.

Rückt der Nullpunkt O an den Rand des Kreises mit dem Mittelpunkt C heran, dann reduziert sich die Ellipse in Satz 13 auf das endliche Segment OC und die Hyperbel in Satz 14 auf das „unendliche Segment" OC (d. h. auf das Segment OC, welches den unendlich fernen Punkt enthält).

Bemerkenswert ist endlich der folgende Grenzfall:

Satz 15. *Ein Polynom n-ten Grades möge in einer Halbebene begrenzt durch eine Gerade L, nicht verschwinden; die Halbebene möge den Nullpunkt enthalten. Das $(n-1)$-te Abschnittspolynom verschwindet dann nicht in einer Parabel, deren Brennpunkt der Nullpunkt und deren Leitgerade L ist.* (Fig. 4.)

Die Sätze über Ellipsen-, Hyperbel- und Parabelbereiche sind bei Polynomen eines festen Grades nicht genau[29]). Die Ermittelung der genauen Bereiche, in welchen das Abschnittspolynom nicht verschwindet, würde — obwohl gänzlich elementare — doch etwas weitläufige Betrachtungen erfordern. — Eine einfache Überlegung zeigt übrigens, daß die oben angegebenen Bereiche für die Gesamtheit aller Polynome (also für Polynome beliebig hohen Grades) genau sind.

17. Man wende den Satz 11 auf die trinomische Gleichung

$$1 - x + c x^n = 0 \qquad (c \neq 0,\ n \geqq 2)$$

an. Es ergibt sich der

Satz 16. *Die Gleichung*

$$1 - x + c x^n = 0 \qquad (c \neq 0,\ n \geqq 2)$$

besitzt in jedem Kreisbereiche, welcher die Punkte

$$1 - e^{i\frac{2\pi}{n}\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

enthält, wenigstens eine Wurzel.

Insbesondere besitzt diese Gleichung stets eine Wurzel im Kreise $|x-1| \leqq 1$ oder auch im Bereiche $|x-1| \geqq 1$[30]).

Betreffs weiterer Ergebnisse über die Lage der Wurzeln trinomischer Gleichungen vgl. § 9, **21**.

---

[29]) Dies ist natürlich immer unter Zugrundelegung einer bestimmten Schar von Kurven zu verstehen; etwa wie hier, unter Zugrundelegung der homofokalen Ellipsen (bzw. Hyperbeln und Parabeln) mit den oben angegebenen Brennpunkten.

[30]) Vgl. etwa L. Fejér, Über Kreisgebiete, in denen eine Wurzel einer algebraischen Gleichung liegt [Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung **26** (1917), S. 114—128], S. 123.

§ 8.

Weitere Bemerkungen zum Faltungssatze.

18. Es sei

$$A(x) \equiv a_0 + \binom{n}{1} a_1 x + \binom{n}{2} a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

eine algebraische Gleichung mit lauter verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, die sämtlich im Kreisbereiche K liegen. Dann lassen sich bekanntlich sämtliche Gleichungen (und nur diese), die mit $A(x)$ apolar (vgl. Einleitung) sind, in der Form

$$c_1 (x - \alpha_1)^n + c_2 (x - \alpha_2)^n + \ldots + c_n (x - \alpha_n)^n = 0$$

geschrieben werden, wobei die Konstanten c_ν beliebig sind[31]).

Mit Rücksicht auf Satz 1 ergibt sich hieraus ohne weiteres der folgende

Determinantensatz 17. *Es seien*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

$2n$ Konstanten von der Art, daß die α_ν sämtlich untereinander verschieden sind und in einem Kreisbereiche K liegen, während die β_ν auch untereinander verschieden sind und außerhalb von K liegen. Dann ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1 - \beta_1)^n, & (\alpha_1 - \beta_2)^n, & \ldots, & (\alpha_1 - \beta_n)^n \\ (\alpha_2 - \beta_1)^n, & (\alpha_2 - \beta_2)^n, & \ldots, & (\alpha_2 - \beta_n)^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot

Solche Matrizen bezeichne ich in leicht verständlicher Weise al *Faktorenmatrizen* $(E\,E)$ bzw. $(E\,\bar{E})$, $(\bar{E}\,E)$, $(\bar{E}\,\bar{E})$ usf. Ähnlich definier ich die Faktorenmatrizen $(A\,A)$, $(A\,\bar{A})$ usf., sowie die Faktorenmatrizer $(R\,R)$.

Zunächst ergibt sich aus Satz 3 der folgende Satz:

Es seien $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gegebene Konstanten. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sobald

$$a(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

eine (E)- (bzw. $(\bar{E})$)-Gleichung ist,

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \neq 0$$

sei, ist die, daß

$$\lambda_0 + \binom{n}{1}\lambda_1 x + \binom{n}{2}\lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n = 0$$

eine $(\bar{E})$- (bzw. (E))-Gleichung sei.

Daß diese Bedingung hinreicht, folgt aus Satz 3, da ja

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 x + \ldots + \lambda_n a_n x^n = 0$$

eine (E)-Gleichung ist. Daß es auch notwendig ist, folgt durch Anwendung der charakteristischen Eigenschaft der λ_ν auf die Gleichung

$$(1 + \xi x)^n = 0,$$

wobei $|\xi| > 1$ (bzw. $|\xi| \geqq 1$) ist, die offenbar auch eine (E)- (bzw. $(\bar{E})$)-Gleichung ist. In der Tat ergibt sich dann

$$\lambda_0 + \binom{n}{1}\lambda_1 \xi + \binom{n}{2}\lambda_2 \xi^2 + \ldots + \lambda_n \xi^n \neq 0,$$

d. h. eben die obige Behauptung.

Es sei nun ξ eine beliebige komplexe Zahl, für welche $|\xi| \geqq 1$ ist. Ein Faktorenmatrix $(E\,E)$ ist dann dadurch charakterisiert, daß

$$\sum_{p=0}^{n} a'_p \xi^p = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu a_\nu \neq 0$$

ist, wobei

$$\lambda_\nu = \sum_{p=0}^{n} \lambda_{p\nu} \xi^p$$

gesetzt wird, und zwar für alle (E)-Gleichungen $a(x) = 0$. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichung in x

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \lambda_{p\nu} \xi^p x^\nu = 0$$

eine $(\bar{E})$-Gleichung sei, d. h. daß

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\lambda_{p\nu}\xi^p x^\nu \neq 0 \qquad (|\xi|\geqq 1,\ |x|>1)$$

sei. Ähnlich lassen sich die übrigen Arten der Faktorenmatrizen diskutieren und es ergibt sich der

Satz 18. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Matrix*

$$(\lambda_{pq}) \qquad (p, q = 0, 1, \ldots, n)$$

im obigen Sinne ein Faktorenmatrix bzw. $(E\,E)$, $(E\,\bar{E})$, $(\bar{E}\,E)$, $(\bar{E}\,\bar{E})$ *sei, ist die, daß*

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\lambda_{p\nu}\xi^p x^\nu \neq 0$$

sei bzw. für

$|\xi|\geqq 1,\ |x|>1;\quad |\xi|>1,\ |x|>1;\quad |\xi|\geqq 1,\ |x|\geqq 1;\quad |\xi|>1,\ |x|\geqq 1.$

Analoge Kriterien lassen sich für Faktorenmatrizen $(A\,A)$, $(A\,\bar{A})$ usf. ableiten.

20. Aus dem in § 1 bewiesenen Faltungssatze folgt unmittelbar der

Satz 19. *Es seien*

$$A(x) \equiv a_0 + \binom{n}{1}a_1 x + \binom{n}{2}a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

$$B(x) \equiv b_0 + \binom{n}{1}b_1 x + \binom{n}{2}b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0$$

zwei algebraische Gleichungen, und K *sei ein beliebiger Kreisbereich, in welchem die rationale Funktion*

$$\frac{A(x)}{B(x)}$$

einen Wert ausläßt. Dann gibt es in jedem Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *welches gleichzeitig den beiden Faltungsgleichungen*

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu S_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

$$B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu S_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

(wobei die S_ν *dieselbe Bedeutung haben, wie in* § 1) *genügt, wenigstens eine Zahl* x_ν, *die außerhalb von* K *liegt.*

Ist nämlich λ der Wert, den die rationale Funktion

$$\frac{A(x)}{B(x)}$$

in K ausläßt, dann liegen offenbar sämtliche Wurzeln der Gleichung

$$A(x) - \lambda B(x) = 0$$

außerhalb von K. (Ist $\lambda = 0$ oder ∞, so ist diese Gleichung durch $A(x) = 0$ bzw. $B(x) = 0$ zu ersetzen.) Daraus folgt aber mit Rücksicht auf den Faltungssatz die Behauptung.

§ 9.

Anwendung auf trinomische und verwandte Gleichungen.

21. Die Methode, die wir für den Beweis von Satz 19 eben verwendet haben, scheint auch zur Erledigung von anderen verwandten Fragen nützlich zu sein. Ich erwähne hier nur eine Anwendung, nämlich die schon vorhin (§ 7) behandelte trinomische Gleichung.

Es gilt der

Satz 20. *Die trinomische Gleichung*

$$1 - x + cx^n = 0 \qquad (c \neq 0,\ n \geqq 2)$$

besitzt in jedem Kreisbereiche eine Wurzel, sobald er n Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *enthält, die nur den folgenden Bedingungen genügen:*

a) *Wenigstens eine von den Zahlen* z_ν *ist* 0.

b) $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = n$.

Insbesondere besitzt die vorgelegte Gleichung in jedem Kreise (oder außerhalb desselben) eine Wurzel, welcher durch die Punkte 0 *und* $\frac{n}{n-1}$ *oder durch die Punkte* 0 *und* 2 *hindurchgeht*[32]).

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir eine allgemeine Gleichung n-ten Grades

$$a(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0.$$

In unserem Falle sind die Koeffizienten dieser Gleichung den Bedingungen

$$a_0 + a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ \ldots,\ a_{n-1} = 0$$

unterworfen, oder der Bedingung

$$(L) \qquad a_0 + a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \ldots + \lambda_{n-1} a_{n-1} = 0,$$

wobei $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1}$ *beliebig* sind. Wir können somit Satz 1′ anwenden. Man setze $a(x) = (x - z)^n$, dann lautet (L)

$$(-z)^n + \binom{n}{1}(-z)^{n-1} + \binom{n}{2}\lambda_2(-z)^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}\lambda_{n-1}(-z) = 0.$$

---

[32]) Vgl. a. a. O. [30]).

Es sei nun $z_1, z_2, \ldots, z_n$ irgendein Wertsystem, welches den Bedingungen a) und b) in Satz 20 genügt. Dann lassen sich die $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1}$ so wählen, daß die letzte Gleichung genau die Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$ besitze. Daraus folgt mit Rücksicht auf Satz 1′ die Behauptung[33]).

22. Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, daß man den vorhergehenden Satz weitgehend verallgemeinern kann. Man erhält mit derselben Methode den folgenden Satz, der in den Picardschen Ideenkreis gehört:

Satz 20′. *Die Gleichung*

$$1 - x + c_r x^r + c_{r+1} x^{r+1} + \ldots + c_n x^n = 0 \qquad (r \geqq 2)$$

besitzt in jedem Kreisbereiche eine Wurzel, sobald er n Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *enthält, die nur den folgenden Bedingungen genügen:*

a) *Wenigstens* $n - r + 1$ *von den Zahlen* z_ν *sind* 0.

b) $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = n$.

Insbesondere besitzt die vorgelegte Gleichung in jedem Kreise (oder außerhalb desselben) eine Wurzel, welcher durch die Punkte 0 *und* $\frac{n}{r-1}$ *hindurchgeht.*

§ 10.

Über Polynome, die ein schlichtes Bild des Einheitskreises entwerfen.

23. Aus dem in § 3 bewiesenen Grace-Heawoodschen Satze läßt sich ohne größere Schwierigkeit ein von Alexander und Kakeya[34]) herrührender Satz ableiten, der sich auf solche Polynome bezieht, die eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln[35]).

Die von den erwähnten Autoren behandelte Fragestellung lautet folgendermaßen:

Welches ist der kleinstmögliche Radius R von der folgenden Beschaffenheit: Sobald die Wurzeln der Ableitung eines Polynoms n-ten Grades $f(x)$ *dem absoluten Betrage nach alle größer als R sind, dann ist* $f(x)$ *schlicht im Einheitskreise* $|x| \leqq 1$?

Die Antwort lautet:

$$R = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

---

[33]) Herr Fekete hat mich aufmerksam gemacht, daß Satz 20 auch direkt aus dem Faltungssatze gefolgert werden kann.

[34]) J. W. Alexander, II., Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions [Annals of Mathematics, (2), 17 (1915), S. 12–22]. — S. Kakeya, On zeros of a polynomial and its derivatives [Tôhoku Mathematical Journal, 11 (1917), S. 5–16].

[35]) Vgl. Kakeya, a. a. O. [34]).

Der Beweis läßt sich mit Hilfe des Grace-Heawoodschen Satzes einfach so führen. Aus diesem Satze ergibt sich unschwer, daß wenn $a \neq b$ und $f(a) = f(b)$ ist, dann verschwindet $f'(x)$ in einem Kreise mit dem Mittelpunkt $\frac{a+b}{2}$ und dem Radius $\frac{|a-b|}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$. Es seien nun a und b beliebige Stellen im Innern oder am Rande des Einheitskreises. Die zugehörigen Kreise bedecken dann einen ganz bestimmten Teil der Ebene. Wenn hier $f'(x) \neq 0$ ist, dann folgt daraus notwendigerweise $f(a) \neq f(b)$ für $a \neq b$, $|a| \leqq 1$, $|b| \leqq 1$. Nun sind aber die Punkte x der Ebene, die in diesen Kreisen liegen, folgendermaßen charakterisiert:

$$x = \frac{a+b}{2} + \theta \frac{a-b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n},$$

wobei $|\theta| \leqq 1$ ist. Daraus folgt

$$|x| \leqq \frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

Der rechtsstehende Ausdruck wird offenbar dann der größte, wenn $|a| = |b| = 1$ ist. Man setze dann

$$\frac{b}{a} = e^{i\varphi};$$

es ist also

$$|x| \leqq \frac{|1+e^{i\varphi}| + |1-e^{i\varphi}| \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{n}\right)}{\sin \frac{\pi}{n}} \leqq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

Man sieht auch sehr leicht ein, daß alle Punkte des Kreises vom Radius

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

bedeckt werden. Damit ist die Behauptung bewiesen.

24. Zum Schluß will ich einen Kompositionssatz erwähnen, der sich auf schlichte Polynome bezieht. Der Satz beruht auf der unmittelbar einleuchtenden Bemerkung, daß die Schlichtheit eines Polynoms $f(x)$ für $|x| \leqq 1$ mit der folgenden Tatsache äquivalent ist: Es bezeichne z_1 und z_2 zwei Parameter mit $|z_1| \leqq 1$, $|z_2| \leqq 1$, dann ist die Gleichung

$$\frac{f(z_1 x) - f(z_2 x)}{(z_1 - z_2) x} = 0$$

eine (A)-Gleichung. Insbesondere ist dann

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

eine (A)-Gleichung.

Daraus folgt der

Satz 21. *Es seien*

$$f(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^n,$$
$$g(x) = b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \ldots + b_{n-1} x^n$$

zwei Polynome n-ten Grades, die ein schlichtes Bild des Einheitskreises entwerfen und den Nullpunkt $x = 0$ wieder in den Nullpunkt überführen. Dann ist das Polynom n-ten Grades

$$h(x) = a_0 b_0 x + \frac{a_1 b_1}{\binom{n-1}{1}} x^2 + \frac{a_2 b_2}{\binom{n-1}{2}} x^3 + \ldots + a_{n-1} b_{n-1} x^n$$

ebenfalls schlicht für $|x| \leqq 1$.

Dasselbe gilt unter der wesentlich allgemeineren Bedingung, daß $g(x)$ zwar nicht schlicht, aber die Gleichung

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = 0$$

eine (A)-Gleichung ist.

In der Tat sind laut Voraussetzung die Gleichungen $(n-1)$-ten Grades

$$\frac{f(z_1 x) - f(z_2 x)}{(z_1 - z_2) x} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \frac{z_1^{\nu+1} - z_2^{\nu+1}}{z_1 - z_2} x^\nu,$$

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu x^\nu$$

(A)-Gleichungen, und zwar für beliebige Werte der Parameter $|z_1| \leqq 1$, $|z_2| \leqq 1$. Nach Satz 3 gilt also dasselbe für die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu b_\nu}{\binom{n-1}{\nu}} \frac{z_1^{\nu+1} - z_2^{\nu+1}}{z_1 - z_2} x^\nu = 0,$$

was gerade mit der Schlichtheit des Polynoms

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu b_\nu}{\binom{n-1}{\nu}} x^{\nu+1}$$

für $|x| \leqq 1$ äquivalent ist.

Berlin, Mai 1921.

(Eingegangen am 10. Mai 1921.)

Über die verschiedenen Arten der Übertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können.

Von

J. A. Schouten in Delft.

§ 1.

Einleitung.

Durch die Untersuchungen von G. Hessenberg[1]), H. Weyl[2]) und R. König[3]) ist klar geworden, daß die Maßbestimmung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die der gewöhnlichen Differentialgeometrie zugrunde gelegt wird, zwei wesentlich verschiedene Elemente enthält. Erstens gibt es da die Maßbestimmung im engeren Sinne, welche mit Hilfe eines Fundamentaltensors die Länge des Linienelementes festlegt:

$$ds^2 = g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu,$$

zweitens die „Übertragung“[4]), durch welche eine bei Koordinatentransformationen invariante Differentiation, die kovariante oder kogrediente Differentiation, festgelegt wird:

$$\delta v_\lambda = dv_\lambda - \left\{ {\lambda\ \mu \atop \nu} \right\} v_\nu\, dx^\mu.$$

In den Arbeiten der erwähnten Autoren hat sich nun nach und nach gezeigt, daß diese Übertragung, die ebenfalls durch den Fundamentaltensor

[1]) Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, Math. Ann. 78 (1916), S. 187–217.

[2]) Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 384–411.

[3]) Beiträge zu einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Jahresber. d. D. Math. Ver. 28 (1920), S. 213–228.

[4]) Weyl verwendet neben „Übertragung“ auch das Wort „Zusammenhang“. Dieses Wort ist in vorliegender Arbeit nicht verwendet, da es zu Verwechslungen mit dem Begriffe des Zusammenhangs der Analysis Situs Anlaß geben könnte. Hessenberg spricht von „äußerer Orientierung“.

estimmt ist, auch in viel freierer Weise und sogar ganz unabhängig von inem Fundamentaltensor definiert werden kann. Es fehlen aber noch inige Schritte, um zu einer vollständigen Übersicht der verschiedenen Möglichkeiten der erweiterten Differentialgeometrie zu gelangen. Erstens t der allgemeinste „lineare" Zusammenhang meines Wissens noch nicht efiniert und es fehlt demzufolge eine vollständige Einteilung der verchiedenen möglichen Fälle. Zweitens hat nur Weyl die von ihm bevorugte Übertragung in invarianter Weise, nämlich durch ein Vektorfeld und in Tensorfeld zweiten Grades, festgelegt, während für die schon bekannten llgemeineren Übertragungen eine solche, das Wesentliche scharf hervorebende, Festlegung fehlt. Drittens sind die zu den verschiedenen Übertragungen gehörigen Krümmungsgrößen vierten Grades, die Verallgemeineungen des Riemann-Christoffelschen Vier-Indizes-Symbols sind, noch icht in ihrer vollen Allgemeinheit und in ihrem gegenseitigen Zusammenang untersucht.

In der vorliegenden Untersuchung sind nun alle achtzehn verschiedenen rten der linearen Übertragung vollständig aufgezählt und in invarianter Veise festgelegt. Die allgemeinste Übertragung wird durch zwei Felder ritten Grades, ein Tensorfeld zweiten Grades und ein Vektorfeld charakerisiert, die Spezialfälle ergeben sich, indem diesen Größen verschiedene Bedingungen auferlegt werden. Die zwei Krümmungsgrößen werden inariant in den vier zugrunde liegenden Feldern ausgedrückt.

Die allgemeineren Übertragungen für $n = 4$ eröffnen für die Physik, enigstens theoretisch, die Möglichkeit einer Erweiterung der Weylschen heorie. Für eine solche Erweiterung ist eine invariante Festlegung der bertragungen notwendig, da eine physische Erscheinung nur mit einem nvarianten Ausdrucke korrespondieren kann. Wir verwenden im folgenden en sogenannten Ricci-Kalkül, der in letzter Zeit eine so große Verreitung gefunden hat, daß der Rechenapparat dem Leser wohl keine chwierigkeiten bereiten wird[5]).

---

[5]) Für Fragen der Differentialgeometrie allgemeiner Art, welche nicht die Einührung irgendeines bestimmten Koordinatensystems verlangen, ist es allerdings viel weckmäßiger, nicht mit Koordinaten zu arbeiten, sondern mit einer direkten Analysis. ine für diesen Zweck gebildete direkte Analysis wurde u. a. ausführlich dargestellt n der Arbeit des Verfassers über die konforme Abbildung einer V_n auf R_n in Math. eitschrift 11 (1921), S. 58—88. Da die Resultate der vorliegenden Arbeit aber für eitere Kreise von Mathematikern und auch für manche Physiker interessant sein ürften, und eine direkte Analysis dem Leser zuerst immer einige Zeit zum Einarbeiten ostet, ist gerade für diese Arbeit die mehr ohne Vorbereitung lesbare Koordinatenethode gewählt.

§ 2.

Die Größen in einem Punkt.

Die ∞^n Werte von n Variablen x^ν, $\nu = a_1, \ldots, a_n$ bilden eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit X_n. Ein bestimmter Wertsatz heißt Punkt. Werden die x^ν in beliebiger Weise kontinuierlich transformiert:

$$(1) \qquad {}'x^\nu = {}'x^\nu(x^{a_1}, \ldots, x^{a_n}), \qquad \nu = a_1, \ldots, a_n,$$

so transformieren sich die Differentiale dx^ν linear homogen:

$$(2) \qquad d\,{}'x^\nu = \frac{\partial\,{}'x^\nu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \ ^6).$$

In einem Punkte der X_n betrachten wir folgende Größen:

1. Kontravariante Größen ersten Grades oder kontravariante Vektoren v^ν. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre n Bestimmungszahlen sich transformieren wie die dx^ν:

$$(3) \qquad {}'v^\nu = \frac{\partial\,{}'x^\nu}{\partial x^\lambda} v^\lambda.$$

Es gibt n linear unabhängige kontravariante Vektoren, $n+1$ derselben sind stets linear abhängig. Das „Linienelement" dx^ν ist ein kontravarianter Vektor.

2. Kovariante Größen ersten Grades oder kovariante Vektoren. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß sich ihre Bestimmungszahlen kontragredient zu den dx^ν transformieren:

$$(4) \qquad {}'w_\lambda = \frac{\partial x^\nu}{\partial\,{}'x^\lambda} w_\nu.$$

In bezug auf die lineare Abhängigkeit gilt das selbe wie für kontravariante Vektoren.

3. Kontravariante Größen (Affinoren) p-ten Grades, $p > 1$. Diese haben n^p Bestimmungszahlen mit p Indizes $v^{\nu_1 \cdots \nu_p}$, die sich transformieren wie die n^p Produkte der Bestimmungszahlen von p beliebigen *verschiedenen* kontravarianten Vektoren:

$$(5) \qquad {}'v^{\nu_1 \ldots \nu_p} = \frac{\partial\,{}'x^{\nu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial\,{}'x^{\nu_p}}{\partial x^{\lambda_p}} v^{\lambda_1 \ldots \lambda_p}.$$

Eine Größe heißt in einigen Indizes *symmetrisch*, wenn die Bestimmungszahlen, die durch Vertauschung irgend zwei dieser Indizes auseinander hervorgehen, gleich sind, sie heißt in diesen Indizes *alternierend* (oder antisymmetrisch), wenn Vertauschung Vorzeichenwechsel herbeiführt.

---

[6]) Über *griechische* Indizes, die in einer Form doppelt vorkommen, werde stets summiert, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil angegeben ist.

p linear unabhängige kontravariante Vektoren $v_1^\nu, \ldots, v_p^\nu$ bestimmen für $p \leqq n$ stets eine in *allen* Indizes alternierende Größe $E^{\nu_1 \cdots \nu_p}$, deren $\binom{n}{p}$ Bestimmungszahlen die p-reihigen Determinanten der Matrix

6) $$\left\| \begin{matrix} v_1^{a_1} & \ldots & v_1^{a_n} \\ \vdots & & \\ v_p^{a_1} & \ldots & v_p^{a_n} \end{matrix} \right\|$$

sind. Eine in *allen* Indizes alternierende Größe p-ten Grades heißt ein *p-Vektor* (Bivektor, Trivektor usw). Eine in *allen* Indizes symmetrische Größe heißt ein *Tensor*. Die n Bestimmungszahlen eines n-Vektors $E^{\nu_1 \cdots \nu_n}$ sind alle gleich $\pm E^{a_1 \cdots a_n}$. Ein n-Vektor ist also durch die eine Bestimmungszahl $E^{a_1 \cdots a_n}$ vollständig bestimmt.

4. Kovariante Größen (Affinoren) p-ten Grades, $p > 1$. Für diese Größen gilt m. m. das selbe wie für kontravariante Größen. Die Indizes werden unten geschrieben:

7) $$'w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial\, 'x^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_p}}{\partial\, 'x^{\lambda_p}} w_{\nu_1 \ldots \nu_p}.$$

5. Gemischte Größen (Affinoren) p-ten Grades. Diese Größen haben n^p Bestimmungszahlen mit p Indizes, die in bestimmter Reihenfolge entweder oben oder unten geschrieben werden, z. B.:

$$v^{\varkappa_1 \cdot \varkappa_3 \varkappa_4 \cdot \cdots}_{\cdot\ \varkappa_2 \cdot\ \cdot \varkappa_5 \cdots \varkappa_p}$$ [7])

und sich transformieren wie die n^p Produkte der Bestimmungszahlen von p Vektoren, von denen einige kovariant, andere kontravariant sind:

8) $$'v^{\varkappa_1 \cdot \varkappa_3 \varkappa_4 \cdot \cdots}_{\cdot\ \varkappa_2 \cdot\ \cdot \varkappa_5 \cdots \varkappa_p} = \frac{\partial\, 'x^{\varkappa_1}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial\, 'x^{\varkappa_2}} \frac{\partial\, 'x^{\varkappa_3}}{\partial x^{\mu_3}} \frac{\partial\, 'x^{\varkappa_4}}{\partial x^{\mu_4}} \frac{\partial x^{\mu_5}}{\partial\, 'x^{\varkappa_5}} \cdots \frac{\partial x^{\prime\prime\mu_p}}{\partial\, 'x^{\varkappa_p}} v^{\prime\prime\mu_1 \cdot \mu_3 \mu_4 \cdot \cdots}_{\cdot\ \mu_2 \cdot\ \cdot \mu_5 \cdots \mu_p}.$$

6. Mit Hilfe von n linear unabhängigen kontravarianten Vektoren $v_1^\nu, \ldots, v_n^\nu$ und eines einzigen kontravarianten n-Vektor $E^{\nu_1 \cdots \nu_n}$ lassen sich n linear unabhängige Sätze von n Werten bilden, die sich kontragredient zu den dx^ν transformieren und also als Bestimmungszahlen von n linear unabhängigen kontravarianten Vektoren aufzufassen sind. Denn die n $(n-1)$-reihigen Determinanten der Matrix der Bestimmungszahlen von $v_1^\nu, \ldots, v_{m-1}^\nu, v_{m+1}^\nu, \ldots, v_n^\nu$, dividiert durch die Bestimmungszahl $E^{a_1 \cdots a_n}$ transformieren sich ja offenbar kontragredient zu dx^ν und für m kann man die Werte $1, \ldots, n$ einsetzen.

---

[7]) Diese Schreibweise ist eine Vereinfachung der von F. Jung vorgeschlagenen

$$v^{\varkappa_1,\ 0,\ \varkappa_3,\ \varkappa_4,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{0,\ \varkappa_2,\ 0,\ 0,\ \varkappa_5,\ \ldots,\ \varkappa_p}.$$

§ 4.

Die Änderung des kovarianten Maßes.

Die Bestimmungszahlen eines kontravarianten Vektors können in beliebiger Weise linear transformiert werden durch Änderung der Wahl der Urvariablen. Dabei ändern sich dann gleichzeitig die Bestimmungszahlen irgendeines kovarianten Vektors in ganz bestimmter Weise. Man kann aber auch, ohne die Urvariablen zu ändern, die Bestimmungszahlen von allen *kovarianten* Vektoren in einem Punkt durch eine Zahl τ dividieren, ohne daß diese dadurch in ihrer Transformationsweise gestört werden:

$$\tau' w_\lambda = w_\lambda . \tag{9}$$

Wir nennen einen solchen Vorgang die „Änderung des kovarianten Maßes". τ ist im allgemeinsten Falle eine Funktion des Ortes[8]). Die Bestimmungszahlen einer gemischten Größe p-ten Grades mit p_1 unteren Indizes bekommen bei Änderung des kovarianten Maßes einen Faktor τ^{-p_1}.

§ 4.

Die Überschiebungen und ihre Invarianz.

Der Ausdruck

$$v^\lambda w_\lambda$$

heißt die *Überschiebung* der beiden Vektoren v^λ und w_λ. Dieser Ausdruck ist bekanntlich invariant bei Änderung der Urvariablen; bei Änderung des kovarianten Maßes tritt aber ein Faktor $\frac{1}{\tau}$ hinzu:

$$\tau' v^{\lambda\prime} w_\lambda = v^\lambda w_\lambda . \tag{10}$$

Enthält das Produkt der Bestimmungszahlen einiger Größen α Male zwei gleiche Indizes, und wird über diese Indizes summiert, so heißt das Resultat die α-te *Überschiebung nach diesen Indizes*. Auch diese Überschiebung ist invariant bei Änderung der Urvariablen, bei Änderung des kovarianten Maßes bekommt sie aber so viele Male den Faktor $\frac{1}{\tau}$ als Paaren gleicher Indizes vorhanden waren, z. B.:

$$\tau^2 u^{\varkappa\lambda\prime} v^\mu_{\cdot\lambda}{}' w_{\mu\nu\cdots}^{\cdot\cdot\cdot\omega} = u^{\varkappa\lambda} v^\mu_{\cdot\lambda} w_{\mu\nu\cdots}^{\cdot\cdot\cdot\omega} . \tag{11}$$

---

[8]) In der Relativitätstheorie könnte man z. B. die Bestimmungszahlen der kontravarianten Verrückungen ungeändert lassen, denen der kovarianten Kräfte dagegen einen vom Ort abhängigen Faktor beilegen.

§ 5.

Die Einheitsgrößen und die Fundamentaltensoren.

Die gemischten Größen zweiten Grades

$$\varepsilon_\lambda^{\ \nu} = \varepsilon^{\nu\,\xi}_{\ .\,\mu} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \lambda = \nu \ \text{(nicht summieren)} \\ 0 & \text{,,} \quad \lambda \neq \nu \end{cases} \tag{12}$$

heißen die *Einheitsgrößen*. Die Einheitsgrößen sind unabhängig von den Urvariablen, und ihre Bestimmungszahlen ändern sich nicht bei Änderung des kovarianten Maßes. Die *Größen* $\varepsilon_\lambda^{\ \nu}$ und $\varepsilon^\nu_{\ .\,\lambda}$ bekommen also bei Änderung des kovarianten Maßes einen Faktor τ. Eine Größe ändert sich nicht bei einmaliger Überschiebung mit einer Einheitsgröße, z. B.:

$$\varepsilon_\lambda^{\ \nu}\, v_\nu = v_\lambda. \tag{13}$$

Die Überschiebung einer Einheitsgröße in sich selbst ist n:

$$\varepsilon_\lambda^{\ \lambda} = \varepsilon^\lambda_{\ .\,\lambda} = n. \tag{14}$$

Werden in bekannter Weise ein ko- und ein kontravarianter Fundamentaltensor $g_{\lambda\mu}$ und $g^{\lambda\mu}$ eingeführt, so ist offenbar:

$$g^{\lambda\mu}\, g_{\mu\varkappa} = \varepsilon^\lambda_{\ .\,\varkappa}, \tag{15}$$

$$g^{\lambda\mu}\, g_{\lambda\mu} = n. \tag{16}$$

§ 6.

Ortsfunktionen.

Wir betrachten nun den Fall, daß eine Größe nicht nur in einem einzigen Punkte der X_n gegeben ist, sondern in *allen* Punkten. Ist ein Skalar p als Ortsfunktion gegeben:

$$p = p(x^{a_1}, \ldots, x^{a_n}), \tag{17}$$

so bilden die n Ableitungen $\frac{\partial p}{\partial x^\lambda}$ die Bestimmungszahlen eines kovarianten Vektors, den *Gradientvektor* von p, und es ist

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x^\lambda} dx^\lambda. \tag{18}$$

Ist in derselben Weise ein Vektor v_λ als Ortsfunktion gegeben, so sind die n^2 Ableitungen

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu}$$

im allgemeinen *nicht* Bestimmungszahlen einer Größe zweiten Grades und auch die n Ausdrücke

$$dv_\lambda = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

transformieren sich *nicht* wie die Bestimmungszahlen eines Vektors. Sowohl die $\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu}$ als die dv_λ stehen also nicht unmittelbar zu einer von den Urvariablen unabhängigen Größe in Beziehung. Dennoch ist es in einer Mannigfaltigkeit mit *euklidischer* Maßbestimmung möglich, eine von den Urvariablen unabhängige Differentiation zu definieren. Diese Möglichkeit beruht darauf, daß die Feldwerte in zwei benachbarten Punkten P und Q vergleichbar sind, indem z. B. der Wert in P durch parallele Verschiebung nach Q gebracht wird. In einem Vektorfeld v_λ kann man so jeder Verrückung einen Differentialvektor, eben die vektorische Differenz der beiden Feldwerte, zuordnen, und daraus lassen sich Differential und Differentialquotient in einer von den Urvariablen unabhängigen Weise bestimmen. Nennen wir mit Hessenberg die n Bestimmungszahlen des in dieser Weise erhaltenen Differentials δv_λ und die n^2 des räumlichen Differentialquotienten $\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\mu}$, so berechnet sich bekanntlich leicht:

$$(20) \qquad \text{a)} \quad \frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\mu} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} - v_\nu \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ \nu \end{matrix} \right\},$$

$$\text{b)} \quad \delta v_\lambda = dv_\lambda - v_\nu \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ \nu \end{matrix} \right\} dx^\mu.$$

In einer allgemeinen X_n ist ein Vergleich von Feldwerten in verschiedenen Punkten zunächst ausgeschlossen, da die parallele Übertragung von Feldwerten von einem Punkte zum andern hier ihre Bedeutung verliert. Solange keine bestimmte „quasi-parallele“ Übertragung definiert ist, die der Differentiation zugrunde gelegt werden kann, haben die Ausdrücke $\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\mu}$ und δv_λ noch gar keine Bedeutung. Ist in der X_n eine quadratische Maßbestimmung gegeben, so kann man die Gleichungen (20) als Definitionsgleichungen einer Differentiation verwenden. Damit ist dann die einfachste mögliche Übertragung festgelegt, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden kann und deren geometrische Bedeutung a. a. O. ausführlich angegeben wurde[9]).

---

[9]) Versl. Kon. Akad. v. Wet. 12. 6. 1918, S. 47 u. 70; Math. Zeitschr. 11 (1921), S. 58.

§ 7.

Die allgemeinste lineare Übertragung in einer X_n.

Man kann auch eine ganz andere Übertragung zugrunde legen. Prinzipiell wäre man in der Wahl der Übertragung sogar vollständig frei. Man könnte z. B. für jede Größe in jedem Punkt der X_n und für jede Richtung eine ganz beliebige Übertragung festlegen. Die zugehörige Differentiation würde dann aber keinem der formalen Gesetze genügen, denen die gewöhnliche Differentiation unterworfen ist. Wir setzen demnach fest, daß das Differential nicht nur von den Urvariablen und der Wahl des kovarianten Maßes unabhängig sein soll, sondern auch noch folgenden Bedingungen unterworfen sei:

1. Eine Größe und ihr Differential haben dieselbe Anzahl Bestimmungszahlen, und diese transformieren sich in derselben Weise.

2. Ist Φ eine beliebige Größe beliebigen Grades, so ist

$$\text{(I)} \qquad \delta\Phi = \frac{\delta\Phi}{\delta x^\mu}\, dx^\mu.$$

3. Sind Φ und Ψ beliebige Größen beliebigen Grades, so ist

$$\text{(II)} \qquad \delta(\Phi+\Psi) = \delta\Phi + \delta\Psi.$$

4. Ebenso ist

$$\text{(III)} \qquad \delta(\Phi\Psi) = \delta\Phi\Psi + \Phi\delta\Psi.$$

5. Das Differential eines Skalars ist identisch mit dem gewöhnlichen Differential.

Eine Übertragung, die diesen Forderungen genügt, heißt eine *lineare Übertragung*.

Die allgemeinste lineare Übertragung ist gegeben durch die Gleichungen

$$(21)\quad \begin{aligned} &\text{a)}\ \frac{\delta v^\nu}{\delta x^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} + v^\lambda \Gamma^\nu_{\lambda\mu}, \\ &\text{b)}\ \delta v^\nu = dv^\nu + v^\lambda \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\, dx^\mu. \end{aligned} \qquad (22)\quad \begin{aligned} &\text{a)}\ \frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\mu} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} + v_\nu \Gamma'^\nu_{\lambda\mu}, \\ &\text{b)}\ \delta v_\lambda = dv_\lambda + v_\nu \Gamma'^\nu_{\lambda\mu}\, dx^\mu. \end{aligned}$$

Die $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ und $\Gamma'^\nu_{\lambda\mu}$ sind $2n^3$ Parameter. Diese Parameter transformieren sich nicht wie die Bestimmungszahlen einer Größe dritten Grades. Ist die Transformation der x^ν gegeben durch die Gleichungen (1), so transformieren sich die $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ und $\Gamma'^\nu_{\lambda\mu}$ folgendermaßen:

(23)
$$\text{a)}\quad {}'\Gamma^{\varkappa}_{\omega\pi} = \frac{\partial \dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial {}'x^{\varpi}}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial {}'x^{\pi}} \frac{\partial {}'x^{\varkappa}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial {}'x^{\varpi}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial {}'x^{\pi}} \frac{\partial {}'x^{\varkappa}}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu},$$

$$\text{b)}\quad {}'\Gamma'^{\varkappa}_{\omega\pi} = -\frac{\partial \dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial {}'x^{\varpi}}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial {}'x^{\pi}} \frac{\partial {}'x^{\varkappa}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial {}'x^{\varpi}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial {}'x^{\pi}} \frac{\partial {}'x^{\varkappa}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}.$$

Daraus geht hervor, daß die Summen $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ Bestimmungszahlen einer Größe dritten Grades sind. Dies läßt sich auch anders ableiten. Aus (III) und (22b) folgt nämlich

(24)
$$\delta\varepsilon^{\cdot\nu}_{\lambda} = (\varepsilon^{\cdot\nu}_{\lambda}\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \varepsilon^{\cdot\nu}_{\lambda}\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu})\,dx^{\mu} = (\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu})\,dx^{\mu}$$

und $C^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\,\lambda} = \dfrac{\delta\varepsilon^{\cdot\nu}_{\lambda}}{\delta x^{\mu}}$ ist also die Größe mit den Bestimmungszahlen $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$

(25)
$$\frac{\delta\varepsilon^{\cdot\nu}_{\lambda}}{\delta x^{\mu}} = C^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\,\lambda} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$$

Diese Größe $C^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\,\lambda}$ soll zunächst näher untersucht werden.

§ 9.

Das Vektorfeld C_{μ}.

Da $\varepsilon^{\cdot\nu}_{\lambda} = 0$ für $\lambda \neq \nu$, ist auch $C^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\,\lambda} = 0$ für $\lambda \neq \nu$ und $C^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\,\lambda}$ kann also geschrieben werden:

(26)
$$C^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\,\lambda} = C_{\mu}\,\varepsilon^{\cdot\nu}_{\lambda}.$$

Der Vektor C_{μ} ist für die Differentiation von $\varepsilon^{\cdot\nu}_{\lambda}$ charakteristisch.

Das Differential der Überschiebung $v^{\lambda}w_{\lambda}$ ist

(27)
$$\delta(v^{\lambda}w_{\lambda}) = d(v^{\lambda}w_{\lambda}) = dv^{\lambda}w_{\lambda} + v^{\lambda}dw_{\lambda}.$$

Nun ist

(28)
$$\delta v^{\lambda}w_{\lambda} = dv^{\lambda}w_{\lambda} + v^{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}w_{\lambda}\,dx^{\mu},$$
$$v^{\lambda}\delta w_{\lambda} = v^{\lambda}dw_{\lambda} + v^{\lambda}\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}w_{\nu}\,dx^{\mu},$$

sodaß

(29)
$$\begin{aligned}\delta(v^{\lambda}w_{\lambda}) &= \delta v^{\lambda}w_{\lambda} + v^{\lambda}\delta w_{\lambda} - v^{\nu}w_{\lambda}C^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\,\nu}\,dx^{\mu}\\ &= \delta v^{\lambda}w_{\lambda} + v^{\lambda}\delta w_{\lambda} - v^{\lambda}w_{\lambda}C_{\mu}\,dx^{\mu}.\end{aligned}$$

In derselben Weise wird gezeigt, daß bei Differentiation einer α-fachen Überschiebung ein Zusatzglied mit $C_{\mu}dx^{\mu}$ mit dem Koeffizienten $-\alpha$ auftritt, z. B.:

(30)
$$\delta(v^{\lambda\omega}_{\cdot\cdot\,\cdot\nu}w^{\varkappa}_{\cdot\lambda\omega}) = \delta v^{\lambda\omega}_{\cdot\cdot\,\cdot\nu}w^{\varkappa}_{\cdot\lambda\omega} + v^{\lambda\omega}_{\cdot\cdot\,\cdot\nu}\delta w^{\varkappa}_{\cdot\lambda\omega} - 2v^{\lambda\omega}_{\cdot\cdot\,\cdot\nu}w^{\varkappa}_{\cdot\lambda\omega}C_{\mu}\,dx^{\mu}.$$

Einige Beispiele mögen das Arbeiten mit dem Zusatzgliede noch verdeutlichen:

31a) $$\delta v_\lambda = \delta(v_\nu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}) = \delta v_\nu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} + v_\nu C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} dx^\mu - v_\nu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} C_\mu dx^\mu = \delta v_\lambda,$$

31b) $$0 = \delta n = \delta(\varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} \varepsilon_\nu^{\cdot\lambda}) = \delta \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} \varepsilon_\nu^{\cdot\lambda} + \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} \delta \varepsilon_\nu^{\cdot\lambda} - 2\varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} \varepsilon_\nu^{\cdot\lambda} C_\mu dx^\mu$$
$$= nC_\mu dx^\mu + nC_\mu dx^\mu - 2nC_\mu dx^\mu = 0,$$

31c) $$\delta \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} = \delta(\varepsilon_\lambda^{\cdot\varkappa} \varepsilon_\varkappa^{\cdot\nu}) = \delta \varepsilon_\lambda^{\cdot\varkappa} \varepsilon_\varkappa^{\cdot\nu} + \varepsilon_\lambda^{\cdot\varkappa} \delta \varepsilon_\varkappa^{\cdot\nu} - \varepsilon_\lambda^{\cdot\varkappa} \varepsilon_\varkappa^{\cdot\nu} C_\mu dx^\mu$$
$$= C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} dx^\mu + C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} dx^\mu - C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} dx^\mu = C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} dx^\mu.$$

Die n^3 Parameter $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ können nun vermittels (25) und (26) in C_μ und den Parametern $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ ausgedrückt werden:

32) $$\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} = -\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}$$

22) geht dann über in:

33) a) $$\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\mu} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} - v_\nu \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + C_\mu v_\lambda,$$

b) $$\delta v_\lambda = \partial v_\lambda - v_\nu \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} dx^\mu + C_\mu v_\lambda dx^\mu.$$

Ändert sich die Wahl des kovarianten Maßes, so ist

34) $$\delta' v_\lambda = \tau^{-1} \delta v_\lambda$$ [10])

und der Vektor C_μ transformiert sich also folgendermaßen:

35) $$'C_\mu = C_\mu + \frac{\partial \lg \tau}{\partial x^\mu}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß das Feld C_μ im allgemeinen nicht durch geeignete Wahl des kovarianten Maßes zum Verschwinden gebracht werden kann. Dies ist nur möglich, wenn C_μ Gradient eines Skalarfeldes ist. Es ist dann gegeben durch die Gleichung

36) $$C_\mu + \frac{\partial \lg \tau}{\partial x^\mu} = 0.$$

---

[10]) Falsch wäre:

$$\delta' v_\lambda = \delta(\tau^{-1} v_\lambda) = \tau^{-1} \delta v_\lambda + v_\lambda \delta \tau^{-1}.$$

Die δv_λ sind die Bestimmungszahlen der Differenz der Feldwerte in P und Q, wenn Q sich P nähert, gemessen mit den in P gültigen kovarianten Maßeinheiten. Ändert sich das kovariante Maß, so bekommt also δv_λ einfach einen Faktor τ^{-1}. Ist aber τ irgendein Skalarfeld, so ist das Differential des Feldes $p v_\lambda$:

$$\delta(p v_\lambda) = \delta p \, v_\lambda + p \, \delta v_\lambda.$$

Man muß sich also stets genau Rechenschaft geben von der Bedeutung von δ. Solche Schwierigkeiten, die leicht zu Fehlern Anlaß geben können, sind eine Folge der hier verwendeten Koordinatenmethode, sie treten nicht auf, wenn man ohne Koordinaten rechnet.

§ 10.

Die Felder $S_{i\lambda}{}^{\cdot}{}_{\mu}{}^{\nu}$ und $Z_{i\lambda}{}^{\cdot}{}_{\mu}{}^{\nu}$.

Aus (23a) und (23b) läßt sich ableiten, daß auch die Differenzen

$$S_{i\lambda}{}^{\cdot}{}_{\mu}{}^{\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}) \tag{37}$$

Bestimmungszahlen einer Größe dritten Grades sind. Dies ergibt sich auch aus folgender Überlegung, bei der gleichzeitig die Bedeutung dieser Größe klar wird. Wir betrachten zwei verschiedene Differentiale $d_1 x^{\nu}$ und $d_2 x^{\nu}$ und bilden den kontravarianten Vektor

$$\begin{aligned} \delta_2 d_1 x^{\nu} - \delta_1 d_2 x^{\nu} &= d_2 d_1 x^{\nu} + d_1 x^{\lambda} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} d_2 x^{\mu} \\ &\quad - d_1 d_2 x^{\nu} - d_2 x^{\lambda} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} d_1 x^{\mu} \\ &= 2 d_1 x^{\lambda} d_2 x^{\mu} S_{i\lambda}{}^{\cdot}{}_{\mu}{}^{\nu}. \end{aligned} \tag{38}$$

Da diese Gleichung für jede Wahl von $d_1 x^{\nu}$ und $d_2 x^{\nu}$ gilt, transformieren sich die $S_{i\lambda}{}^{\cdot}{}_{\mu}{}^{\nu}$ in der Tat wie die Bestimmungszahlen einer gemischten Größe dritten Grades. Offenbar ist $S_{i\lambda}{}^{\cdot}{}_{\mu}{}^{\nu}$ in den beiden ersten Indizes alternierend. Bei Änderung der Wahl des kovarianten Maßes ändern sich die Bestimmungszahlen $S_{\lambda\mu}{}^{\nu}$ nicht, die *Größe* $S_{i\lambda}{}^{\cdot}{}_{\mu}{}^{\nu}$ bekommt also einen Faktor τ^2.

Es sei nun in der X_n ein beliebiges kontinuierliches Skalarfeld p gegeben. Bekanntlich verschwindet bei der gewöhnlichen Differentiation in einer Mannigfaltigkeit mit euklidischer Maßbestimmung $\frac{\delta}{\delta x^{\lambda}} \frac{\partial p}{\partial x^{\mu}} - \frac{\delta}{\delta x^{\mu}} \frac{\partial p}{\partial x^{\lambda}}$ identisch. Wir untersuchen nun diesen Ausdruck für eine allgemeine lineare Übertragung:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x^{\lambda}} \frac{\partial p}{\partial x^{\mu}} - \frac{\delta}{\delta x^{\mu}} \frac{\partial p}{\partial x^{\lambda}} &= \frac{\partial^2 p}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} + \frac{\partial p}{\partial x^{\mu}} C_{\lambda} \\ &\quad - \frac{\partial^2 p}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} + \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - \frac{\partial p}{\partial x^{\lambda}} C_{\mu} \\ &= (2 S_{i\lambda}{}^{\cdot}{}_{\mu}{}^{\nu} + C_{\lambda} \varepsilon_{i\mu}{}^{\cdot}{}^{\nu} - C_{\mu} \varepsilon_{i\lambda}{}^{\cdot}{}^{\nu}) \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} \end{aligned} \tag{39}$$

Damit also $\frac{\delta}{\delta x^{\lambda}} \frac{\partial p}{\partial x^{\mu}} - \frac{\delta}{\delta x^{\mu}} \frac{\partial p}{\partial x^{\lambda}}$ für jede Wahl von p verschwindet, ist notwendig und hinreichend, daß die Größe

$$Z_{i\lambda}{}^{\cdot}{}_{\mu}{}^{\nu} = S_{i\lambda}{}^{\cdot}{}_{\mu}{}^{\nu} + \frac{1}{2}(C_{\lambda} \varepsilon_{i\mu}{}^{\cdot}{}^{\nu} - C_{\mu} \varepsilon_{i\lambda}{}^{\cdot}{}^{\nu}) \tag{40}$$

verschwindet. In diesem Falle nennen wir die Übertragung *symmetrisch*. Aus (33a) folgt, daß bei einer symmetrischen Übertragung der Wirbel eines kovarianten Vektorfeldes:

41) $$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\mu}-\frac{\delta v_\mu}{\delta x^\lambda}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu}-\frac{\partial v_\mu}{\partial x^\lambda}\right)-v_\nu Z_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu}-\frac{\partial v_\mu}{\partial x^\lambda}\right)$$

nabhängig von C_μ ist. Nochmalige Differentiation von (41) gibt die für ede *symmetrische* Überschiebung gültige Identität

42) $$\begin{Vmatrix} \frac{\delta}{\delta x^{a_1}} & \cdots & \frac{\delta}{\delta x^{a_n}} \\ \frac{\delta}{\delta x^{a_1}} & \cdots & \frac{\delta}{\delta x^{a_n}} \\ v_{a_1} & \cdots & v_{a_n} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{a_1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^{a_n}} \\ \frac{\partial}{\partial x^{a_1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^{a_n}} \\ v_{a_1} & \cdots & v_{a_n} \end{Vmatrix} = 0.$$

Bei Änderung der Wahl des kovarianten Maßes geht $Z_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ über in.

43) $$\begin{aligned} {}'Z_{\lambda\mu}^{\ \ \nu} &= {}'S_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}+\frac{1}{2}({}'C_\mu\,{}'\varepsilon_\mu^{\ \nu}-{}'C_\mu\,{}'\varepsilon_\lambda^{\ \nu}) \\ &= S_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}+\frac{1}{2}(C_\lambda\varepsilon_\mu^{\ \nu}-C_\mu\varepsilon_\lambda^{\ \nu})+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lg\tau}{\partial x^\lambda}\varepsilon_\mu^{\ \nu}-\frac{\partial \lg\tau}{\partial x^\mu}\varepsilon_\lambda^{\ \nu}\right). \end{aligned}$$

Damit also $Z_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ durch geeignete Wahl des kovarianten Maßes zum Verschwinden gebracht werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß erstens $S_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ auf die Form

44) $$S_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}=\frac{1}{2}(S_\lambda\varepsilon_\mu^{\ \nu}-S_\mu\varepsilon_\lambda^{\ \nu})$$

ebracht werden kann, und zweitens $S_\mu+C_\mu$ Gradient eines Skalarfeldes st. τ ist dann gegeben durch die Gleichung

45) $$S_\mu+C_\mu+\frac{\partial \lg\tau}{\partial x^\mu}=0.$$

Gilt nur (44) und ist S_μ beliebig, so nennen wir die Übertragung *albsymmetrisch.*

Für eine halbsymmetrische Übertragung ist für jede Wahl der Urariablen:

46) $$\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}=\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu},$$

enn λ, μ und ν *alle ungleich* sind, oder wenn $\lambda=\mu$, und nur in diesen ällen. Ist C_μ Null und ist die Übertragung symmetrisch, so gilt (46) uch in allen anderen Fällen.

Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß ein kovarianter ektor Gradient eines Skalarfeldes ist, lautet für eine allgemeine lineare bertragung:

47) $$\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\mu}-\frac{\delta v_\mu}{\delta x^\lambda}=2Z_{\mu\lambda}^{\ \ \nu}v_\nu$$

ir eine halbsymmetrische:

48) $$\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\mu}-\frac{\delta v_\mu}{\delta x^\lambda}=(S_\mu+C_\mu)v_\lambda-(S_\lambda+C_\lambda)v_\mu$$

und für eine symmetrische:

$$\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\mu} - \frac{\delta v_\mu}{\delta x^\lambda} = 0. \tag{49}$$

§ 11.

Das Feld $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$.

Es sei jetzt ein Tensor $g^{\lambda\nu}$ mit nicht verschwindender Determinante gegeben. Es existiert dann ein und nur ein Tensor $g_{\varkappa\lambda}$, so daß

$$g_{\varkappa\lambda} g^{\lambda\nu} = \varepsilon_\varkappa^{\cdot\nu}. \tag{50}$$

Man kann diese Tensoren später als Fundamentaltensoren verwenden; dies ist aber für unsere Betrachtungen zunächst ganz unwesentlich. Die erste Ableitung des Tensors $g^{\lambda\nu}$ ist jedenfalls eine gemischte Größe dritten Grades. Wir schreiben sie $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$:

$$\frac{\delta g^{\lambda\nu}}{\delta x^\mu} = Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}, \qquad \delta g^{\lambda\nu} = Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}\, dx^\mu. \tag{51}$$

$Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$ ist symmetrisch in den Indizes $\lambda\nu$, da $g^{\lambda\nu}$ in diesen Indizes symmetrisch ist. Da

$$C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\alpha}\, dx^\mu = \delta \varepsilon_\lambda^{\cdot\alpha} = \delta(g_{\lambda\beta} g^{\alpha\beta}) = \delta g_{\lambda\beta} g^{\alpha\beta} + g_{\lambda\beta} Q_\mu^{\cdot\alpha\beta}\, dx^\mu - C_\mu g_{\lambda\beta} g^{\alpha\beta}\, dx^\mu, \tag{52}$$

folgt durch Überschiebung mit $g_{\alpha\nu}$ nach ν:

$$\delta g_{\lambda\nu} = - g_{\lambda\beta} g_{\alpha\nu} Q_\mu^{\cdot\alpha\beta}\, dx^\mu + 2 C_\mu g_{\lambda\nu}\, dx^\mu \tag{53}$$

und

$$\frac{\delta g_{\lambda\nu}}{\delta x^\mu} = - g_{\lambda\beta} g_{\alpha\nu} Q_\mu^{\cdot\alpha\beta} + 2 C_\mu g_{\lambda\nu}. \tag{54}$$

Bei Änderung der Wahl des kovarianten Maßes bleiben die Bestimmungszahlen $g^{\lambda\nu}$, $g_{\lambda\nu}$ und $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$ unverändert. Die *Größe* $g^{\lambda\nu}$ bleibt also unverändert und die *Größen* $g_{\lambda\nu}$ und $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$ bekommen einen Faktor τ^2 bzw. τ.

Man kann statt $g^{\lambda\nu}$ einen andern Tensor ${}'g^{\lambda\nu}$ wählen. Jede Änderung von $g^{\lambda\nu}$ und $g_{\lambda\nu}$ kann gegeben werden durch Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} {}'g^{\lambda\nu} &= p_\varkappa^\lambda g^{\varkappa\nu} & g^{\varkappa\nu} &= r_\lambda^\varkappa\, {}'g^{\lambda\nu} \\ {}'g_{\lambda\nu} &= r_\lambda^\varkappa g_{\varkappa\nu} & g_{\varkappa\nu} &= p_\varkappa^\lambda\, {}'g_{\lambda\nu}, \end{aligned} \tag{55}$$

worin $p_\varkappa^\lambda$ und $r_\lambda^\varkappa$ gemischte Größen zweiten Grades sind, die den Gleichungen

$$p_\lambda^\varkappa r^\nu = \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} \tag{56}$$

enügen, und deren Bestimmungszahlen sich bei Änderung der Wahl des ovarianten Maßes nicht ändern.

Da nun

57) $$\delta' g^{\lambda\nu} = \delta(p_\varkappa^\lambda g^{\varkappa\nu}) = \delta p_\varkappa^\lambda g^{\varkappa\nu} + p_\varkappa^\lambda \delta g^{\varkappa\nu} + C_\mu p_\varkappa^\lambda g^{\varkappa\nu} dx^\mu$$
$$= dx^\mu \left(\frac{\delta p_\varkappa^\lambda}{\delta x^\mu} g^{\varkappa\nu} + p_\varkappa^\lambda Q_\mu^{\cdot\varkappa\nu} - C_\mu p_\varkappa^\lambda g^{\varkappa\nu} \right)$$

ransformiert sich $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$ bei dieser Änderung in folgender Weise:

58) $$'Q_\mu^{\cdot\lambda\nu} = p_\varkappa^\lambda Q_\mu^{\cdot\varkappa\nu} + \left(\frac{\delta p_\varkappa^\lambda}{\delta x^\mu} - C_\mu p_\varkappa^\lambda \right) g^{\varkappa\nu}.$$

§ 12.

Die allgemeinste lineare Übertragung ausgedrückt in C_μ, $S_{\lambda\mu}^{\cdot\nu}$, $g^{\lambda\nu}$ und $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$.

Wir wollen nun zeigen, daß die allgemeinste lineare Übertragung ollständig bestimmt ist, wenn C_μ und $S_{\lambda\mu}^{\cdot\nu}$ gegeben sind und überdies bei gend einer Wahl von $g^{\lambda\nu}$ die zugehörige Größe $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$. Es ist zu bechten, daß infolge der Transformationsweise der Bestimmungszahlen dieser Größen bei Änderung der Wahl des kovarianten Maßes und von $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$ bei nderung der Wahl von $g^{\lambda\nu}$ *die allgemeinste lineare Übertragung von er Wahl des kovarianten Maßes und von* $g^{\lambda\nu}$ *vollkommen unabhängig ist.*

Da nach (III) und (21a)

59) $$\frac{\delta g^{\lambda\nu}}{\delta x^\mu} = \frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + g^{\lambda\varkappa} \Gamma_{\varkappa\mu}^\nu + g^{\varkappa\nu} \Gamma_{\varkappa\mu}^\lambda$$

t nach (51):

60) $$g^{\lambda\varkappa} \Gamma_{\varkappa\mu}^\nu + g^{\varkappa\nu} \Gamma_{\varkappa\mu}^\lambda = -\frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}.$$

In derselben Weise erhält man aus (III), (33a) und (54) die leichung

61) $$g_{\lambda\varkappa} \Gamma_{\nu\mu}^\varkappa + g_{\varkappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\varkappa = \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + g_{\lambda\beta} g_{\nu\alpha} Q_\mu^{\cdot\alpha\beta},$$

ie nur eine andere Form von (60) ist. Wir setzen nun:

62) $$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu = 2 \Pi_{\lambda\mu}^\nu$$

nd addieren die drei Gleichungen:

$$g_{\lambda\varkappa}\Pi^{\varkappa}_{\nu\mu}+g_{\varkappa\nu}\Pi^{\varkappa}_{\lambda\mu}=\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}+g_{\lambda\beta}g_{\nu\alpha}Q_{\mu}^{\cdot\alpha\beta}-g_{\lambda\varkappa}S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\nu\mu}-g_{\varkappa\nu}S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu}$$

$$g_{\nu\varkappa}\Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda}+g_{\varkappa\mu}\Pi^{\varkappa}_{\nu\lambda}=\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}}+g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha}Q_{\lambda}^{\cdot\alpha\beta}-g_{\nu\varkappa}S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\lambda}-g_{\varkappa\mu}S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\nu\lambda} \tag{63}$$

$$-g_{\mu\varkappa}\Pi^{\varkappa}_{\lambda\nu}-g_{\varkappa\lambda}\Pi^{\varkappa}_{\mu\nu}=-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}-g_{\mu\beta}g_{\lambda\alpha}Q_{\nu}^{\cdot\alpha\beta}+g_{\mu\varkappa}S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\nu}+g_{\varkappa\lambda}S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\mu\nu}.$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}2g_{\varkappa\nu}\Pi^{\varkappa}_{\lambda\mu}=&\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)\\&+g_{\lambda\beta}g_{\nu\alpha}Q_{\mu}^{\cdot\alpha\beta}+g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha}Q_{\lambda}^{\cdot\alpha\beta}-g_{\mu\beta}g_{\lambda\alpha}Q_{\nu}^{\cdot\alpha\beta}\\&-2(g_{\lambda\varkappa}S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\nu\mu}+g_{\mu\varkappa}S^{\cdot\cdot\varkappa}_{\nu\lambda})\end{aligned} \tag{64}$$

oder

$$\begin{aligned}\Pi^{\nu}_{\lambda\mu}=&\frac{1}{2}g^{\nu\varkappa}\left(\frac{\partial g_{\lambda\varkappa}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\varkappa\mu}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\varkappa}}\right)\\&+\frac{1}{2}g^{\nu\varkappa}(g_{\lambda\beta}g_{\varkappa\alpha}Q_{\mu}^{\cdot\alpha\beta}+g_{\varkappa\beta}g_{\mu\alpha}Q_{\lambda}^{\cdot\alpha\beta}-g_{\mu\beta}g_{\lambda\alpha}Q_{\varkappa}^{\cdot\alpha\beta})\\&-g^{\nu\varkappa}(g_{\lambda\alpha}S^{\cdot\cdot\alpha}_{\varkappa\mu}+g_{\mu\alpha}S^{\cdot\cdot\alpha}_{\varkappa\lambda}),\end{aligned} \tag{65}$$

oder:

$$\begin{aligned}\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}-\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}=&\frac{1}{2}(g_{\lambda\beta}Q_{\mu}^{\cdot\nu\beta}+g_{\mu\alpha}Q_{\lambda}^{\cdot\alpha\nu}-g^{\nu\varkappa}g_{\mu\beta}g_{\lambda\alpha}Q_{\varkappa}^{\cdot\alpha\beta})\\&-g^{\nu\varkappa}(g_{\lambda\alpha}S^{\cdot\cdot\alpha}_{\varkappa\mu}+g_{\mu\alpha}S^{\cdot\cdot\alpha}_{\varkappa\lambda})+S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}.\end{aligned} \tag{66}$$

Schreiben wir für den Ausdruck rechts

$$\begin{aligned}T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}=&\frac{1}{2}(g_{\lambda\beta}Q_{\mu}^{\cdot\nu\beta}+g_{\mu\alpha}Q_{\lambda}^{\cdot\alpha\nu}-g^{\nu\varkappa}g_{\mu\beta}g_{\lambda\alpha}Q_{\varkappa}^{\cdot\alpha\beta})\\&-g^{\nu\varkappa}(g_{\lambda\alpha}S^{\cdot\cdot\alpha}_{\varkappa\mu}+g_{\mu\alpha}S^{\cdot\cdot\alpha}_{\varkappa\lambda})+S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu},\end{aligned} \tag{67}$$

welche Gleichung, wenn $g^{\lambda\nu}$ und $g_{\lambda\nu}$ als Fundamentaltensoren gewählt werden, durch Herauf- und Herunterziehen von Indizes einfacher geschrieben werden kann:

$$T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}=\frac{1}{2}(Q^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}+Q^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}-Q^{\nu}_{\cdot\lambda\mu})-S^{\nu}_{\cdot\mu\lambda}-S^{\nu}_{\cdot\lambda\mu}+S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}, \tag{68}$$

so ist:

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}=\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}+T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} \tag{69}$$

und nach (25):

$$\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}=-\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}-T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}+C_{\mu}\varepsilon^{\cdot\nu}_{\lambda}. \tag{70}$$

Infolgedessen gehen die Gleichungen (21) und (22) über in:

$$\begin{aligned}&\text{a)}\quad\frac{\delta v^{\nu}}{\delta x^{\mu}}=\frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\mu}}+v^{\lambda}\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}+v^{\lambda}T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}=\frac{\delta_0 v^{\nu}}{\delta_0 x^{\mu}}+v^{\lambda}T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}\\&\text{b)}\quad\delta v^{\nu}=dv^{\nu}+v^{\lambda}\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}dx^{\mu}+v^{\lambda}T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}dx^{\mu}=\delta_0 v^{\nu}+v^{\lambda}T^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}dx^{\mu},\end{aligned} \tag{71}$$

72) a) $$\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\mu} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} - v_\nu \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ \nu \end{matrix} \right\} - v_\nu T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + C_\mu v_\lambda = \frac{\delta_0 v_\lambda}{\delta_0 x^\mu} - v_\nu T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + C_\mu v_\lambda$$

b) $$\delta v_\lambda = d v_\lambda - v_\nu \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ \nu \end{matrix} \right\} dx^\mu - v_\nu T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} dx^\mu + C_\mu v_\lambda dx^\mu,$$

$$= \delta_0 v_\lambda - v_\lambda T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} dx^\mu + C_\mu v_\lambda dx^\mu.$$

Hierin bezieht sich δ_0 auf die einfache Differentiation, die sich ergibt, wenn C_μ, $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ und $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$ alle verschwinden, der Fall der gewöhnlichen Differentialgeometrie.

Zusammenfassend können wir nun den Satz aussprechen:

In einer X_n läßt sich eine lineare Übertragung definieren, die invariant ist bei Änderung der Urvariablen und des kovarianten Maßes und unabhängig von der Wahl des Fundamentaltensors. Diese Übertragung ist vollständig bestimmt durch ein kovariantes Vektorfeld C_μ und ein gemischtes Feld dritten Grades $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$, die sich bei Änderung der Wahl des kovarianten Maßes folgendermaßen transformieren:

$$'C_\mu = C_\mu + \frac{\partial \lg \tau}{\partial x^\mu}$$

$$'S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$$

und ein in bezug auf irgendein Tensorfeld $g^{\lambda\nu}$ definiertes Feld $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$, das sich bei Änderung des kovarianten Maßes folgendermaßen transformiert:

$$'Q_\mu^{\cdot\lambda\nu} = Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$$

und dessen Transformation bei der Änderung des Feldes $g^{\lambda\nu}$:

$$'g^{\lambda\nu} = p_\varkappa^\lambda g^{\varkappa\nu}$$

gegeben ist durch die Gleichung:

$$'Q_\mu^{\cdot\lambda\nu} = p_\varkappa^\lambda Q_\mu^{\cdot\varkappa\nu} + \left(\frac{\delta p_\varkappa^\lambda}{\delta x^\mu} - C_\mu p_\varkappa^\lambda \right) g^{\varkappa\nu}.$$

§ 12.

Spezialisierung der allgemeinsten linearen Übertragung.

Die allgemeinste lineare Übertragung, die wir mit Ia bezeichnen, kann durch Hinzufügung von besonderen Bedingungen in verschiedenen Weisen spezialisiert werden. Durch Aufstellen der Bedingung (44) entsteht die halbsymmetrische Übertragung Ib, welche dieselbe Invarianz besitzt wie Ia. Für Ib ist, wenn $g^{\lambda\nu}$ Fundamentaltensor ist:

$$\text{a)}\quad T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \tfrac{1}{2}(Q_\mu{}^\nu{}_\lambda + Q_\lambda{}^\nu{}_\mu - Q^\nu{}_{\cdot\lambda\mu}) + S_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} - S^\nu g_{\lambda\mu}$$

(73)

$$\text{b)}\quad T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} - C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} = \tfrac{1}{2}(Q_\mu{}^\nu{}_\lambda + Q_\lambda{}^\nu{}_\mu - Q^\nu{}_{\cdot\lambda\mu}) - C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} + S_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} - S^\nu g_{\lambda\mu}.$$

Fordert man dazu:

$$S_\mu = -C_\mu, \tag{74}$$

so entsteht die symmetrische Übertragung Ic, nicht invariant bei Änderung des kovarianten Maßes. Für diese Übertragung ist

$$\text{a)}\quad T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \tfrac{1}{2}(Q_\mu{}^\nu{}_\lambda + Q_\lambda{}^\nu{}_\mu + Q^\nu{}_{\cdot\lambda\mu}) - C_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} + C^\nu g_{\lambda\mu}$$

(75)

$$\text{b)}\quad T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} - C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} = \tfrac{1}{2}(Q_\mu{}^\nu{}_\lambda + Q_\lambda{}^\nu{}_\mu - Q^\nu{}_{\cdot\lambda\mu}) - (C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} + C_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} - C^\nu g_{\lambda\mu}).$$

Der zweite Ausdruck ist symmetrisch in λ und μ.

Aus Ia, b, c entstehen IIa, b, c für $C_\mu = 0$, diese Übertragungen sind nicht invariant bei Änderung des kovarianten Maßes. Ist C_μ Gradient eines Skalarfeldes, so lassen sich Ia, b, c durch geeignete Wahl des kovarianten Maßes stets in IIa, b, c überführen.

Weitere Spezialisierungen können erhalten werden, indem man besondere Bedingungen für $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$ aufstellt. Man kann fordern, daß sich ein Fundamentaltensor $g^{\lambda\nu}$ so wählen läßt, daß

$$Q_\mu^{\cdot\lambda\nu} = Q_\mu\, g^{\lambda\nu} \tag{76}$$

und also nach (51) und (54):

$$\frac{\delta g^{\lambda\nu}}{\delta x^\mu} = Q_\mu g^{\lambda\nu}, \qquad \frac{\delta g_{\lambda\nu}}{\delta x^\mu} = (2C_\mu - Q_\mu) g_{\lambda\nu}. \tag{77}$$

Diese Bedingung ergibt die Übertragung IIIa, invariant bei Änderung des kovarianten Maßes und bei Transformationen des Fundamentaltensors, von der Form

$$'g^{\lambda\nu} = \sigma^{-1} g^{\lambda\nu}, \qquad 'g_{\lambda\nu} = \sigma g_{\lambda\nu}. \tag{78}$$

Bei diesen Transformationen transformiert sich Q_μ folgendermaßen:

$$'Q_\mu = Q_\mu - \frac{\partial \lg \sigma}{\partial x^\mu}. \tag{79}$$

Durch Hinzufügung der Bedingungen (44) bzw. (44) und (74) entstehen die Übertragungen IIIb bzw. IIIc.

Für IIIb ist

$$T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \tfrac{1}{2}(Q_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} + Q_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} - Q^\nu g_{\lambda\mu}) + S_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} - S^\nu g_{\lambda\mu}, \tag{80}$$

ährend für IIIc:

$$1)\quad \text{a)}\quad T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \tfrac{1}{2}(Q_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} + Q_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} - Q^\nu g_{\lambda\mu}) - C_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} + C^\nu g_{\lambda\mu}$$

$$\text{b)}\quad T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} - C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} = \tfrac{1}{2}(T_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} + T_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} - T^\nu g_{\lambda\mu}),$$

rin:

$$2)\qquad T_\mu = Q_\mu - 2C_\mu.$$

Für $Q_\mu = 0$ entstehen aus IIIa, b, c die Übertragungen Va, b, c. t Q_μ bei irgendeiner Wahl des Fundamentaltensors Gradient eines alarfeldes, so läßt sich immer ein neuer Fundamentaltensor so wählen, ß Q_μ Null wird, IIIa, b, c können dann also stets in Va, b, c über-führt werden.

Für $C_\mu = 0$ gehen IIIa, b, c über in IVa, b, c und Va, b, c in Ia, b, c. Für IVc ist:

$$3)\qquad T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \tfrac{1}{2}(Q_\mu \varepsilon_\lambda^{\nu} + Q_\lambda \varepsilon_\mu^{\nu} - Q^\nu g_{\lambda\mu}).$$

Folgende Tabelle gibt eine Übersicht der 18 verschiedenen Über-agungen.

Verschiedene Arten der Übertragung in einer V_n

	$\delta\varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}$	$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$	$Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$	Invariant bei Änderung der Wahl von
Ia	$C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}\, dx^\mu$	allgemein	allgemein	x^ν, kov. Maß, $g^{\lambda\nu}$
b	„	$\frac{1}{2}(S_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} - S_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu})$	„	x^ν, kov. Maß, $g^{\lambda\nu}$
c	„	$\frac{1}{2}(-C_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} + C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu})$	„	x^ν, $g^{\lambda\nu}$
IIa	0	allgemein	allgemein	x^ν, $g^{\lambda\nu}$
b	0	$\frac{1}{2}(S_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} - S_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu})$	„	x^ν, $g^{\lambda\nu}$
c	0	0	„	x^ν, $g^{\lambda\nu}$
IIa	$C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}\, dx^\mu$	allgemein	$Q_\mu g^{\lambda\nu}$	x^ν, kov. Maß *)
b	„	$\frac{1}{2}(S_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} - S_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu})$	„	x^ν, kov. Maß *)
c	„	$\frac{1}{2}(-C_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} + C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu})$	„	x^ν *)
Va	0	allgemein	allgemein	x^ν *)
b	0	$\frac{1}{2}(S_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} - S_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu})$	„	x^ν *)
c	0	0	„	x^ν *)

*) Und bei Transformationen der Form $'g^{\lambda\nu} = \tau^{-1} g^{\lambda\nu}$.

Verschiedene Arten der Übertragung in einer V_n

	$\delta \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}$	$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$	$Q_{\mu}^{\cdot\lambda\nu}$	Invariant bei Änderung der Wahl von
Va	$C_\mu\, \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}\, dx^\mu$	allgemein	0	x^ν, kov. Maß
b	„	$\frac{1}{2}(S_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} - S_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu})$	0	x^ν, kov. Maß
c	„	$\frac{1}{2}(-C_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} + C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu})$	0	x^ν
VIa	0	allgemein	0	x^ν
b	0	$\frac{1}{2}(S_\lambda \varepsilon_\mu^{\cdot\nu} - S_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu})$	0	x^ν
c	0	0	0	x^ν

VIc ist die Übertragung der gewöhnlichen Differentialgeometrie, die der Einsteinschen Relativitätstheorie zugrunde liegt. VIa tritt bei Hessenberg[11]) auf. IVc ist von Weyl[12]) seiner Relativitätstheorie zugrunde gelegt. IIc tritt vorübergehend auf bei Weyl[12]) und IIa ist behandelt von König[13]).

§ 13.

Die Krümmungsgrößen der Übertragung Ia.

Wir betrachten das infinitesimale Viereck x^ν, $x^\nu + d_1 x^\nu$, $x^\nu + d_1 x^\nu + d_2 x^\nu$, $x^\nu + d_2 x^\nu$ und schreiben für das Flächenelement

$$\frac{1}{2}(d_1 x^\lambda d_2 x^\mu - d_2 x^\lambda d_1 x^\mu) = f^{\lambda\mu}\, d\sigma. \tag{85}$$

Die Summe der Inkremente eines gegeben kovarianten Vektorfeldes v_λ über die vier Seiten ist

$$D_{12} v_\lambda = \delta_2 \delta_1 v_\lambda - \delta_1 \delta_2 v_\lambda. \tag{86}$$

Diese Größe ist im allgemeinen nicht Null, sie ist dann und nur dann für jede Wahl von v_λ Null, wenn sich von einem Bezugsystem, das quasiparallel um das Viereck geführt wird, Anfangs- und Endstellung decken.

Nun ist:

$$\begin{aligned} D_{12} v_\lambda &= \delta_2 (d_1 v_\lambda + v_\nu \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} d_1 x^\mu) - \delta_1 (d_2 v_\lambda + v_\nu \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} d_2 x^\mu) \\ &= d_1 v_\nu \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} d_2 x^\mu + d_2 v_\nu \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} d_1 x^\mu + v_\nu d_2 \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} d_1 x^\mu \\ &+ v_\varkappa \Gamma'^{\varkappa}_{\nu\mu} \Gamma'^{\nu}_{\lambda\omega} d_1 x^\mu d_2 x^\omega \\ &- d_2 v_\nu \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} d_1 x^\mu - d_1 v_\nu \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} d_2 x^\mu - v_\nu d_1 \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} d_2 x^\mu \\ &- v_\varkappa \Gamma'^{\varkappa}_{\nu\mu} \Gamma'^{\nu}_{\lambda\omega} d_2 x^\mu d_1 x^\omega \\ &= v_\nu \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma'^{\nu}_{\lambda\omega} + \Gamma'^{\nu}_{\varkappa\mu} \Gamma'^{\varkappa}_{\lambda\omega} - \Gamma'^{\nu}_{\varkappa\omega} \Gamma'^{\varkappa}_{\lambda\mu} \right\} d_1 x^\mu d_2 x^\omega. \end{aligned} \tag{87}$$

[11]) a. a. O. [1]). — [12]) a. a. O. [2]). — [13]) a. a. O. [3]).

ıreiben wir nun:

8) $$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\omega}\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma'^{\nu}_{\lambda\omega} - \Gamma'^{\nu}_{\varkappa\mu}\Gamma'^{\varkappa}_{\lambda\omega} + \Gamma'^{\nu}_{\varkappa\omega}\Gamma'^{\varkappa}_{\lambda\mu},$$

ist

9) $$D_{12}v_\lambda = d_1 x^\mu d_2 x^\omega R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} v_\nu = d\sigma f^{\mu\omega} R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} v_\nu.$$

derselben Weise ist

0) $$D_{12}w^\nu = -d\sigma f^{\mu\omega} U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} w^\lambda,$$

1) $$-U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\omega}\Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^\nu_{\lambda\omega} + \Gamma^\nu_{\varkappa\omega}\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu} - \Gamma^\nu_{\varkappa\mu}\Gamma^\varkappa_{\lambda\omega}.$$

ıs (88) und (89) geht hervor, daß die Bestimmungszahlen von $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ d $U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ invariant sind bei Änderung des kovarianten Maßes. Die *ößen* $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ und $U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ bekommen also einen Faktor τ^3.

Um die Beziehung zwischen $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ und $U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ abzuleiten, wenden wir ıı an auf irgendeine in X_n konstante Überschiebung $v^\lambda w_\lambda$. Sodann ist

$$= D_{12}(v^\lambda w_\lambda) = \delta_2(\delta_1 v^\lambda w_\lambda + v^\lambda \delta_1 w_\lambda - v^\lambda w_\lambda C_\mu d_1 x^\mu)$$
$$- \delta_1(\delta_2 v^\lambda w_\lambda + v^\lambda \delta_2 w_\lambda - v^\lambda w_\lambda C_\mu d_2 x^\mu)$$

$$= D_{12}v^\lambda w_\lambda + v^\lambda D_{12}w_\lambda - v^\lambda w_\lambda\left(\frac{\delta C_\mu}{\delta x^\omega} - \frac{\delta C_\omega}{\delta x^\mu}\right) d_1 x^\mu d_2 x^\omega$$
$$- v^\lambda w_\lambda C_\mu(\delta_2 d_1 x^\mu - \delta_1 d_2 x^\mu)$$

$$= d_1 x^\mu d_2 x^\omega\Big\{- U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} v^\lambda w_\nu + R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} v^\lambda w_\nu - v^\lambda w_\lambda\left(\frac{\delta C_\mu}{\delta x^\omega} - \frac{\delta C_\omega}{\delta x^\mu}\right) -$$
$$- 2v^\lambda w_\lambda S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\nu} C_\nu\Big\}$$

$$= d_1 x^\mu d_2 x^\omega\Big\{- U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} + R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} - \left(\frac{\delta C_\mu}{\delta x^\omega} - \frac{\delta C_\omega}{\delta x^\mu}\right)\varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} + 2Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} C_\varkappa \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}\Big\} v^\lambda w_\nu.$$

ese Gleichung kann nur dann für jede beliebige Wahl von v^λ und w_λ lten, wenn

3) $$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} + \left(\frac{\delta C_\mu}{\delta x^\omega} - \frac{\delta C_\omega}{\delta x^\mu}\right)\varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} - 2Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} C_\varkappa \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}.$$

ır eine symmetrische Übertragung verschwindet $Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$, sodaß für diesen Fall

4) $$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} + \left(\frac{\delta C_\mu}{\delta x^\omega} - \frac{\delta C_\omega}{\delta x^\mu}\right)\varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}.$$

außerdem $C_\mu = 0$, so ist

5) $$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}.$$

Da

$$(96)\quad D_{12}v_\lambda = \delta_2\left(\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\mu}d_1x^\mu\right) - \delta_1\left(\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\omega}d_2x^\omega\right)$$
$$= \left(\frac{\delta}{\delta x^\omega}\frac{\delta}{\delta x^\mu} - \frac{\delta}{\delta x^\mu}\frac{\delta}{\delta x^\omega}\right)v_\lambda\, d_1x^\mu d_2x^\omega + \frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\nu}(\delta_2 d_1 - \delta_1 d_2)x^\nu$$
$$- \delta_1 v_\lambda C_\omega d_2x^\omega + \delta_2 v_\lambda C_\mu d_1x^\mu$$
$$= \left(\frac{\delta}{\delta x^\omega}\frac{\delta}{\delta x^\mu} - \frac{\delta}{\delta x^\mu}\frac{\delta}{\delta x^\omega}\right)v_\lambda d_1x^\mu d_2x^\omega + 2d_1x^\mu d_2x^\omega S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\nu}\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\nu}$$
$$- d_1x^\mu d_2x^\omega C_\omega\varepsilon_\mu^{\cdot\nu}\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\nu} + d_1x^\mu d_2x^\omega C_\mu\varepsilon_\omega^{\cdot\nu}\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\nu}$$

ist

$$(97)\quad \left(\frac{\delta}{\delta x^\omega}\frac{\delta}{\delta x^\mu} - \frac{\delta}{\delta x^\mu}\frac{\delta}{\delta x^\omega}\right)v_\lambda = R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}v_\nu + Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu}\frac{\delta v_\lambda}{\delta x^\nu}.$$

Zur Berechnung von $U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ setzen wir in (91) den Wert von $\Gamma_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ aus (69) ein. Dann ergibt sich:

$$(98)\quad -U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\omega}\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\lambda\omega\\ \nu\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\varkappa\omega\\ \nu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}$$
$$- \left\{\begin{matrix}\varkappa\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\lambda\omega\\ \varkappa\end{matrix}\right\} + \frac{\partial}{\partial x^\omega}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}T_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu} + \left\{\begin{matrix}\varkappa\omega\\ \nu\end{matrix}\right\}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$$
$$+ T_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu}\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} + T_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} - \left\{\begin{matrix}\varkappa\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}T_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} - T_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu}\left\{\begin{matrix}\lambda\omega\\ \varkappa\end{matrix}\right\} - T_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu}T_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa}.$$

Nun ist nach III, (71a) und (72a):

$$(99)\quad \frac{\partial}{\partial x^\omega}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{\delta}{\delta x^\omega}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + \left[\left\{\begin{matrix}\lambda\omega\\ \varkappa\end{matrix}\right\} + T_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} - C_\omega\varepsilon_\lambda^{\cdot\varkappa}\right]T_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu}$$
$$+ \left[\left\{\begin{matrix}\mu\omega\\ \varkappa\end{matrix}\right\} + T_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} - C_\omega\varepsilon_\mu^{\cdot\varkappa}\right]T_{\lambda\varkappa}^{\cdot\cdot\nu}$$
$$- \left[\left\{\begin{matrix}\varkappa\omega\\ \nu\end{matrix}\right\} + T_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu}\right]T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa},$$

sodaß

$$(100)\quad U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \frac{\delta}{\delta x^\omega}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + \frac{\delta}{\delta x^\mu}T_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu}$$
$$- T_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa}T_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} - T_{\lambda\varkappa}^{\cdot\cdot\nu}T_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} + T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}T_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu} + T_{\lambda\varkappa}^{\cdot\cdot\nu}T_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$$
$$+ 2C_\omega T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} - 2C_\mu T_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu}$$

und nach (93)

$$(101)\quad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \frac{\delta}{\delta x^\omega}T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + \frac{\delta}{\delta x^\mu}T_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu}$$
$$- T_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa}T_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} - T_{\lambda\varkappa}^{\cdot\cdot\nu}T_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} + T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}T_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu} + T_{\lambda\varkappa}^{\cdot\cdot\nu}T_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$$
$$+ 2C_\omega T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} - 2C_\mu T_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu} + \left(\frac{\delta C_\mu}{\delta x^\omega} - \frac{\delta C_\omega}{\delta x^\mu}\right)\varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} - 2Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}C_\varkappa\varepsilon_\lambda^{\cdot\nu},$$

welchen Formeln $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ dem Riemann-Christoffelschen Vierindizessymbol gleich ist.

Offenbar sind $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ und $U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ in den beiden ersten Faktoren alternierend (erste Identität):

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = -R_{\mu\omega\lambda}^{\cdot\cdot\nu}, \qquad U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = -U_{\mu\omega\lambda}^{\cdot\cdot\nu}. \tag{102}$$

Die Größen zweiten Grades

$$R_{\mu\lambda} = -R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\omega}, \qquad U_{\mu\lambda} = -U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\omega}, \tag{103}$$

sind Kovarianten von $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ bzw. $U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$. Die Bestimmungszahlen $R_{\mu\lambda}$ und $U_{\mu\lambda}$ bekommen einen Faktor τ^{-1} bei Änderung des kovarianten Maßes. Die *Größen* $R_{\mu\lambda}$ und $U_{\mu\lambda}$ bekommen also einen Faktor τ.

§ 14.

Die Krümmungsgrößen der weniger allgemeinen Übertragungen.

Für die symmetrische Übertragung Ic gilt für $U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ (100), während nach (40) und (93):

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} + \left(\frac{\delta C_\mu}{\delta x^\omega} - \frac{\delta C_\omega}{\delta x^\mu}\right)\varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}. \tag{104}$$

Das für eine symmetrische Übertragung (97) übergeht in:

$$\left(\frac{\delta}{\delta x^\omega}\frac{\delta}{\delta x^\mu} - \frac{\delta}{\delta x^\mu}\frac{\delta}{\delta x^\omega}\right) v_\lambda = R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} v_\nu, \tag{105}$$

ist infolge der für jede symmetrische Übertragung gültigen Gleichung (42):

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} + R_{\mu\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu} + R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0 \qquad \text{(zweite Identität)}. \tag{106}$$

Für die symmetrische Übertragung IIc ist $C_\mu = 0$, $Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} = 0$ und $T_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} = T_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}$, sodaß

$$\begin{aligned} R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} &- \frac{\delta}{\delta x^\omega} T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + \frac{\delta}{\delta x^\mu} T_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\nu} \\ &- T_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} T_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} + T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} T_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu}. \end{aligned} \tag{107}$$

Für IIIc ist

$$\begin{aligned} U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} &- \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta x^\omega} T_\mu - \frac{\delta}{\delta x^\mu} T_\omega\right)\varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} \\ &- \left\{\left(2\frac{\delta T_\lambda}{\delta x^\omega} + T_\omega T_\lambda - \frac{1}{2} T_\alpha T_\beta g^{\alpha\beta} g_{\omega\lambda}\right) \gtrless g_{\mu\varkappa}\right\} g^{\varkappa\nu} \\ &- \frac{1}{2}(C_\omega Q_\mu - C_\mu Q_\omega)\varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}, \end{aligned} \tag{108}$$

$$\overset{\varepsilon}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} R = U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} + \left(\frac{\delta C_\mu}{\delta x^\omega} - \frac{\delta C_\omega}{\delta x^\mu}\right)\varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}; \qquad T_\mu = Q_\mu - 2C_\mu,$$

wo wir zur Abkürzung gesetzt haben:

$$(109)\qquad P_{\omega\lambda} \owedge g_{\mu\varkappa} = \frac{1}{4}(P_{\omega\lambda}\, g_{\mu\varkappa} - P_{\mu\lambda}\, g_{\omega\varkappa} - P_{\omega\varkappa}\, g_{\mu\lambda} + P_{\mu\varkappa}\, g_{\omega\lambda}).$$

Für IVc wird $T_\mu = Q_\mu$ und es ist:

$$(110)\qquad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta x^\omega} Q_\mu - \frac{\delta}{\delta x^\mu} Q_\omega\right) \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}$$
$$- \left\{\left(2\,\frac{\delta Q_\lambda}{\delta x^\omega} + Q_\omega Q_\lambda - \frac{1}{2} Q_\alpha Q_\beta\, g^{\alpha\beta}\, g_{\omega\lambda}\right) \owedge g_{\mu\varkappa}\right\} g^{\varkappa\nu}.$$

Für Vc wird $T_\mu = -2C_\mu$ und es ist:

$$(111)\qquad U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \left(\frac{\delta}{\delta x^\omega} C_\mu - \frac{\delta}{\delta x^\mu} C_\omega\right) \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}$$
$$+ \left\{\left(4\,\frac{\delta C_\lambda}{\delta x^\omega} - 4\, C_\omega C_\lambda + 2\, C_\alpha\, C_\beta\, g^{\alpha\beta}\, g_{\omega\lambda}\right) \owedge g_{\mu\varkappa}\right\} g^{\varkappa\nu},$$

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \left(\frac{\delta C_\mu}{\delta x^\omega} - \frac{\delta C_\omega}{\delta x^\mu}\right) \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}.$$

Für VIc ist endlich:

$$(112)\qquad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = K_{\omega\mu\lambda\varkappa}\, g^{\varkappa\nu}\ ^{14}).$$

Für $K_{\omega\mu\lambda\varkappa}$ gilt bekanntlich (dritte Identität)

$$(113)\qquad K_{\omega\mu\lambda\varkappa} = -K_{\omega\mu\varkappa\lambda}.$$

Aus dieser Gleichung und der zweiten Identität (105) (vierte Identität) folgt:

$$(114)\qquad K_{\omega\mu\lambda\varkappa} = K_{\lambda\varkappa\omega\mu}\ ^{15}).$$

§ 15.

Geometrische Deutung einiger Übertragungen.

Ist in der V_n eine geschlossene Kurve s durch einen Punkt P gegeben, so kann man, anfangend in P, irgendeine Größe entlang s quasiparallel verschieben. Anfangswert und Endwert in P sind dann im allgemeinen verschieden.

Für symmetrische Übertragung sind bei Verschiebung von v_λ und w^ν von x^ν über $x^\nu + d_1 x^\nu$, $x^\nu + d_1 x^\nu + d_2 x^\nu$ und $x^\nu + d_2 x^\nu$ nach x^ν zurück die Differenzwerte von v_λ und w^ν:

---

[14]) Formeln für $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ finden sich für IVc bei Weyl und für IIa bei König.

[15]) Auf diese Beziehung der vier Identitäten der Krümmungsgröße ξ vierten Grades hat Hessenberg zuerst aufmerksam gemacht (a. a. O. [1]). Bei der hier gegebenen Darstellung ist ersichtlich wie die Identitäten verschiedenen Stufen der Spezialisierung entstammen, die erste ist stets vorhanden, die zweite tritt schon in Ic auf, die dritte und vierte erst in VIc.

15)
$$D v_\lambda = d\sigma f^{\mu\omega} R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} v_\nu$$
$$D w^\nu = - d\sigma f^{\mu\omega} U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} w^\lambda$$

d der Differenzwert von $v_\lambda w^\lambda$ ist also:

16) $$D(v_\lambda w^\lambda) = d\sigma f^{\mu\omega}(R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}) v_\nu w^\lambda = d\sigma f^{\mu\omega}\left(\frac{\delta C_\mu}{\delta x^\omega} - \frac{\delta C_\omega}{\delta x^\mu}\right) v_\lambda w^\lambda.$$

, verschwindet also für symmetrische Übertragung dann und nur dann, enn der Anfangswert und der Endwert von $v_\lambda w^\lambda$ für jede Wahl von und w^λ und für jede Lage von P und s verschwindet. C_μ ist dann adient eines Skalarfeldes und kann durch geeignete Wahl des kovarianten aßes zum Verschwinden gebracht werden.

Wir betrachten jetzt die Gesamtheit der kontravarianten Linienemente in P in ihrer Anfangs- und Endstellung. Die Umgebung von P rd in dieser Weise affin auf sich selbst abgebildet. Ebenso wird die esamtheit der kovarianten Vektoren in P affin auf sich selbst abgeldet. Läßt sich nun ein Fundamentaltensor so wählen, daß die Abldung der Umgebung stets eine konforme ist, unabhängig von der Lage n P und s, so ist $\delta g^{\lambda\nu} = Q_\mu g^{\lambda\nu} dx^\mu$. Auch die Gesamtheit der korianten Vektoren wird dann konform auf sich selbst abgebildet, denn ist $\delta g_{\lambda\nu} = (2C_\mu - Q_\mu) g_{\lambda\nu} dx^\mu$. Die Verhältniszahl ist aber für beide bbildungen nicht dieselbe, sie wird dies dann und nur dann für jede ahl von P und s, wenn $C_\mu = 0$.

§ 16.

ventuelle Bedeutung der vorliegenden Untersuchung für die Physik.

Der Einsteinschen Relativitätstheorie liegt die Übertragung VIc er gewöhnlichen Differentialgeometrie zugrunde. H. Weyl hat zu Recht emerkt, daß hier zwar die ferngeometrische Vergleichungsmöglichkeit on Richtungen ausgeschaltet ist, eine konsequente Nahegeometrie aber och nicht erreicht ist, da die beibehaltene Vergleichung von Längen an erschiedenen Orten in endlicher Entfernung als übriggebliebener, fernometrischer Rest zu betrachten ist. Weyl hat nun auch die fernometrische Vergleichungsmöglichkeit von Längen ausgeschaltet und ist zum Zusammenhang IVc gelangt. Eine vollständige konsequente ahegeometrie war damit aber noch nicht erreicht. Auch bei IVc ist noch möglich, *Winkel* in verschiedenen Punkten in endlicher Entrnung zu vergleichen, und das selbe gilt für die *Größenbeziehungen vischen kovarianten und kontravarianten Größen*. Der erste fernometrische Rest verschwindet bei Einführung von $Q_\mu^{\cdot\cdot\lambda\nu}$ statt $Q_\mu g^{\lambda\nu}$, der veite bei Berücksichtigung des Feldes C_μ. Auch die Bedingung, daß

die Übertragung in jedem Punkte symmetrisch sein soll, ist ein ferngeometrischer Rest, der erst bei Berücksichtigung des Feldes $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ verschwindet. Erst die Übertragung Ia ergibt, wenn man von nicht linearen Übertragungen absieht, eine konsequente Nahegeometrie. Es muß aber zugegeben werden, daß auch die Bedingung des Linearseins selbst noch einen ferngeometrischen Rest darstellt, der auf die Existenz noch allgemeinerer Arten der Übertragung hinweist. Man könnte nun den Versuch machen, in der von Weyl eingeschlagenen Richtung weiterzugehen und der allgemeinsten linearen Übertragung Ia dem physischen Weltbilde zugrunde zu legen. Einige Konsequenzen sind dann sofort zu übersehen:

1. Von der Verteilung der Materie im weitesten Sinne müßten abhängig sein:
   a) die Felder C_μ und $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ bei beliebig gegebener Wahl des kovarianten Maßes.
   b) das Feld $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$ bei beliebig gegebener Wahl des kovarianten Maßes und des Fundamentaltensors.
2. Wenn der Weylsche Ansatz richtig ist und Q_μ mit dem elektromagnetischen Potential korrespondiert, so müßten die elektromagnetischen Gleichungen in ihrer jetzigen Form Annäherungen sein in bezug auf eine allgemeinere Theorie mit $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$, so wie die Gleichungen der klassischen Mechanik mit g Annäherungen sind in bezug auf die relativistische Mechanik mit $g_{\lambda\nu}$. Es wäre aber auch möglich, daß C_μ mit dem elektromagnetischen Potential korrespondiert. Das Auftreten von $2C_\mu - Q_\mu$ in (78) läßt auf eine nahe Verwandtschaft zwischen C_μ und Q_μ schließen.
3. Die Größe $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ müßte korrespondieren mit irgendwelchen Erscheinungen, die sich entweder bisher den Beobachtungen entzogen haben oder in einer anderen Weise interpretiert sind.

Die Brauchbarkeit der Übertragung Ia hängt aufs engste damit zusammen, ob sich auch bei dieser allgemeinsten Übertragung noch ein Wirkungsprinzip aufstellen läßt. Es ist nun sehr merkwürdig, daß dies wirklich möglich ist. Die Gleichung:

$$\delta \int dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma dx^\delta R_{\alpha\beta\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} R_{\gamma\delta\nu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} \tag{117}$$

ist in der Tat unabhängig von der Wahl der Urvariablen, von der Wahl des kovarianten Maßes und von der Wahl des Fundamentaltensors. Man kann auch eine der Größen $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ oder beide durch $U_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ ersetzen[16]). Andere mögliche Ansätze wären:

[16]) Weitzenböck hat kürzlich die 6 verschiedenen möglichen Wirkungsfunktionen $W_1, \ldots, W_6$ der Weylschen Physik berechnet. Sitz.-Ber. Wien. Akad. 129 (1920), S. 683—708. Die Gleichung (117) liefert für IVc die Wirkungsfunktion W_4.

18) $$\delta \int dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma dx^\delta R_{\lambda\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot\nu} R_{\nu\gamma\delta}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} = 0,$$

19) $$\delta \int dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma dx^\delta R_{\lambda\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} R_{\nu\gamma\delta}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0.$$

e linke Seite der letzten Gleichung verschwindet aber identisch für die bertragung VIc.

Man könnte auch den Versuch machen, eine der Übertragungen niger allgemein als Ia zugrunde zu legen. Da käme wohl zunächst in Betracht. C_μ erhielte dann die Bedeutung des Potentialvektors. i dieser Übertragung ändern nur die kovarianten Vektoren (die Kräfte) im Herumführen ihre Größe, nicht aber die kontravarianten (die Maßbe). Da gerade die Größenänderung der Maßstäbe zu physikalischen nsequenzen führt, die manchem Physiker widerstreben, der Größenderung der Kräfte dagegen diese Konsequenzen nicht anhaften, wäre r Versuch mit Vc vielleicht lohnend.

Natürlich kann nur das allerdings ziemlich umständliche Durchrechnen r verschiedenen möglichen Ansätze für die Variationsgleichung, zunächst hl der Gleichung (117), entscheiden, inwiefern die verschiedenen Übergungen nicht nur mathematisch interessant sind, sondern auch für die ysik irgendeinen Wert haben.

(Eingegangen am 14. Mai 1921.)

Nachtrag.

Während der Drucklegung der vorliegenden Arbeit erhielt ich die ueste Arbeit von Herrn A. S. Eddington, A generalisation of Weyls eory of the elektromagnetic and gravitational Fields, Proc. Roy. Soc. 99 921), S. 104—122. Eddington hat die Übertragung IIc entwickelt, h. er hat $Q_\mu g^{\lambda\nu}$ ersetzt durch $Q_\mu^{\cdot\cdot\lambda\nu}$. Er gibt eine Formel für $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$ d $R_{\mu\lambda}$. Besonders interessant sind seine physischen Auseinandersetzungen. den Feldern C_μ und $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ gelangt Eddington nicht, er ist sich aber r Existenz nichtsymmetrischer Übertragungen bewußt und in einer ßnote gibt er einen sehr bemerkenswerten Hinweis auf die Möglichkeit, ß gerade diese Übertragungen zu den mit Quanten zusammenhängenden scheinungen in Beziehung stehen. (d. 11. 6. 21.)

Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper.

Dritte Abhandlung[1]).

Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper.

Von

Leon Lichtenstein in Münster i. W.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Erstes Kapitel. Problemstellung und Existenzbeweis.

§ 1. Vorbereitende Betrachtungen.

1. Das Newtonsche Potential einer Kreislinie.
2. Potential eines Kreisringkörpers T in einem Punkte seiner Oberfläche S.
3. Potential eines beliebigen Rotationskörpers T_1 in der Nachbarschaft des Kreisringkörpers T in einem Punkte seiner Oberfläche S_1.
4. Potential des Rotationskörpers T_1 in einem Punkte seiner Oberfläche S_1 (Fortsetzung).
5. Potential des Rotationskörpers T_1 in einem Punkte seiner Oberfläche S_1 (Schluß).

§ 2. Die fundamentale Integro-Differentialgleichung des Problems.

---

[1]) Man vergleiche hierzu L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Erste Abhandlung. Die Laplacesche Theorie des Erdmondes. Diese Zeitschrift **10** (1921), S. 130–159. Zweite Abhandlung. Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit. Diese Zeitschrift **12** (1922), S. 201–218. Zu der vorliegenden und den beiden ersten Abhandlungen vergleiche man ferner meine Schrift, Mathematische Probleme in der Theorie der Figur der Himmelskörper, Sitzungsberichte der Bayer. Akad. der Wissenschaften, Jahrgang 1921, S. 17–28.

eites Kapitel. Hilfssätze.

§ 1. Das Newtonsche Potential einer Kreislinie.

§ 2. Potential eines Kreisringkörpers in einem Punkte seiner Oberfläche.

§ 3. Der Integralausdruck $\int_0^1 \Delta_3' dt$.

§ 4. Der Integralausdruck $\int_0^1 \Delta_4 dt$.

§ 5. Der Integralausdruck $\int_0^1 \Delta_2 dt$.

In dem § 6 des zweiten Bandes der *Mécanique Céleste* beschäftigt Laplace mit der Figur der Saturnringe. Er geht von der Voraus-ung aus, daß die Saturnringe aus einer homogenen, unzusammendrück-en Flüssigkeit bestehen und sich unter der Einwirkung der Eigen-vitation, der Anziehung durch den Zentralkörper und der Zentrifugal-fte im Gleichgewichte befinden. Das von Laplace behandelte Problem tet genauer wie folgt. In dem Ursprung eines kartesischen Koordinaten-tems sei ein punktförmiges Attraktionszentrum von der Masse M an-racht. Um die z-Achse rotiert wie ein starrer Körper, mit konstanter nkelgeschwindigkeit ω, eine ringförmige Masse T_1, die aus einer homo-en Flüssigkeit der Dichte f besteht. Sei S_1 die Oberfläche von T_1. lche Gestalt nimmt T_1 unter gleichzeitiger Wirkung der Eigengravi-on, der Anziehung durch den Zentralkörper und der Zentrifugalkräfte an? Laplace nimmt an, daß T_1 die Ebene $z = 0$ zur Symmetrieebene , und ersetzt die Anziehung von T_1 auf den Punkt P_1 von S_1 durch Anziehung des unendlichen homogenen Zylinders, dessen Mantel S_1 gs der Meridiankurve durch P_1 berührt. Für den Meridianschnitt T_1 findet Laplace eine Ellipse, deren lange Achse nach der Rota-nsachse hin gerichtet ist.

Dieses erste Laplacesche Resultat ist später von Frau S. Kowalewski, in einer bekannten Abhandlung die Annäherung einen Schritt weiter rieben hatte, verbessert worden[2]). Für $M = 0$ findet Frau Kowalewski ringförmige Gleichgewichtsfigur ohne Zentralkörper, deren Existenz Thomson und Tait postuliert worden ist. Das gleiche Resultat etwas später auf einem anderen Wege Poincaré gewonnen[3]).

---

[2]) Vgl. S. Kowalewski, Zusätze und Bemerkungen zu Laplaces Rechnungen die Gestalt der Saturnringe, Astr. Nachrichten, **111** (1885), S. 37ff. Man ver-he auch F. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, Paris 1891, **2**, S. 137–154.

[3]) Vgl. H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide, animée d'un mouve-de rotation. Bull. astr. **2** (1885), S. 109 ff. und S. 404 ff. Dort findet sich eine

Wir beziehen, wie vorhin ausgeführt, die Lage der Punkte im Raum auf ein kartesisches Koordinatensystem x, y, z. Die Gerade $x = y =$ sei die Umdrehungsachse. Der Zentralkörper befinde sich im Koordinaten ursprung. Die Abmessungen des Meridianschnittes des Ringes nehme wir als klein gegenüber dem Abstande seines Schwerpunktes von der Um drehungsachse an.

Frau Kowalewski setzt die Gleichung der Meridiankurve in der Form

$$x = L - L\sigma\cos t, \qquad z = \sigma L(\alpha \sin t + \alpha' \sin 2t + \alpha'' \sin 3t + \ldots)$$

an, unter σ eine kleine Größe, unter t einen reellen Parameter verstanden $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ sind zu bestimmende Konstanten. Wäre $\alpha' = \alpha'' = \ldots = 0$ so wäre der Meridianschnitt eine Ellipse, die Laplacesche Ellipse. D für kleine σ bereits diese eine gute Annäherung darstellt, so ist zu er warten, daß $\alpha'', \alpha''', \ldots$ klein gegen α ausfallen werden. Frau Kowalewsk setzt $\alpha'' = \alpha''' = \ldots = 0$ und bestimmt α' und die Winkelgeschwindig keit ω so, daß in dem Ausdrucke für das Potential der wirkenden Kräft gewisse Glieder niedrigster Ordnung verschwinden. In ähnlicher Weis verfährt Poincaré. Augenscheinlich ist auf diesem Wege nur eine an genäherte Lösung zu gewinnen. Aber auch wenn man sich nicht vor vornherein mit der Betrachtung einer beschränkten Anzahl von Gliedern begnügt hätte, ließe sich bei diesem Ansatz schwerlich ein Konvergenz beweis der gewonnenen Entwicklung führen.

Die Ergebnisse und Methoden der bekannten Abhandlungen von A. Liapounoff sowie meiner vor einiger Zeit veröffentlichten Arbeiten über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten[4]) führen nach Über windung neuer nicht unerheblicher analytischer Schwierigkeiten zu einem exakten Existenzbeweise der von Laplace betrachteten Gleichgewichts figuren.

In der vorliegenden Abhandlung wird der Existenzbeweis der von Thomson und Tait postulierten ringförmigen Gleichgewichtsfiguren

---

Anzahl weiterer Resultate, insbesondere über Gleichgewichtsfiguren, die aus zwei ko axialen wie ein starrer Körper rotierenden Ringen bestehen, abgeleitet. Man ver gleiche auch F. Tisserand, loc. cit. [2]) S. 155–167.

[4]) Siehe L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren ro tierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze an ziehen. Erste Abhandlung: Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze Math. Zeitschrift, 1 (1918), S. 229–284; 3 (1919), S. 172–174. Zweite Abhandlung Stabilitätsfragen, Math. Zeitschrift 7 (1920), S. 126–231. Diese Arbeiten werden in folgenden kurz als Abh. I und Abh. II bezeichnet.

Man vergleiche insbesondere Kapitel III, § 6 der Abh. II. In der Einleitung zu dieser und zu der ersten Abhandlung habe ich die Beziehungen meiner Arbeiten zu denjenigen von A. Liapounoff ausführlich besprochen.

ne Zentralkörper, deren Meridiankurve sich wenig von einem Kreise erscheidet, durchgeführt. Mit den ringförmigen Figuren bei Vorhanden- n eines Zentralkörpers sowie mit anderen sich hieran anschließenden oblemen der Himmelsmechanik werden sich weitere Abhandlungen dieser ie beschäftigen. Der Existenzbeweis der Thomson-Taitschen Figuren ngt mit der Auflösung einer gewissen nichtlinearen Integro-Differential- ichung zusammen. Die zugehörige charakteristische lineare homogene egralgleichung besitzt eine nicht triviale Nullösung. Es liegt demnach, bei der Laplaceschen Theorie des Erdmondes, der Verzweigungsfall , so daß eigentlich eine „Verzweigungsgleichung" ins einzelne unter- ht werden müßte[5]). Die hiermit verbundenen außerordentlich umständ- nen, zum Teil ziffermäßigen Rechnungen lassen sich indessen, wie ich erdings erkannt habe, vermeiden, wenn man in den Ausdruck für die nkelgeschwindigkeit einen Parameter einführt und diesen nachträglich in eigneter Weise bestimmt[6]). Hierdurch läßt sich nicht nur der Existenz- weis der ringförmigen Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper ohne itere Komplikationen zu Ende führen, sondern auch die Behandlung derer Gleichgewichtsfiguren ganz wesentlich vereinfachen. Insbesondere t sich die bei der Betrachtung des Erdmondes durchgeführte Diskussion Verzweigungsgleichung ganz vermeiden[6]).

Erstes Kapitel.

Problemstellung und Existenzbeweis.

§ 1.

Vorbereitende Betrachtungen.

Um die Grundgedanken des Existenzbeweises besser hervortreten zu sen, sollen in diesem Paragraphen einige Formeln und Hilfssätze zum il ohne Beweis zusammengestellt werden. Die fehlenden Beweise werden dem zweiten Kapitel nachgeholt.

1. Das Newtonsche Potential einer Kreislinie.

In der Ebene $z = z_0$ eines kartesischen Koordinatensystems x, y, z sei mit Masse der Liniendichte 1 belegter Kreis vom Halbmesser l um Koordinatenursprung gegeben (Fig. 1). Sein Newtonsches Potential Punkte $(x, 0, z)$ ist

$$\mathfrak{V} = 2 \log \frac{8\,l}{d} + \mathfrak{P}_1\left(\frac{x-l}{l},\ \frac{z-z_0}{l}\right) \log \frac{8\,l}{d} + \mathfrak{P}_2\left(\frac{x-l}{l},\ \frac{z-z_0}{l}\right),$$

$$d^2 = (x-l)^2 + (z-z_0)^2.$$

[5]) Vgl. loc. cit. [1]), insb. Math. Zeitschrift **10** (1921), S. 136–144.

[6]) Man vergleiche die analogen Betrachtungen der in der Fußnote [1]) an zweiter lle genannten Abhandlung.

Die Funktionen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sind für alle hinreichend kleinen Werte von $\left|\frac{x-l}{l}\right|$ und $\left|\frac{z-z_0}{l}\right|$ analytisch und regulär.

Es gilt ferner

$$\mathfrak{P}_1(0,0) = \mathfrak{P}_2(0,0) = 0^{7}).$$

2. Potential eines Kreisringkörpers T in einem Punkte seiner Oberfläche S.

Die Punkte einer Ebene $\mathfrak{E}$ seien auf ein kartesisches Koordinatensystem $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$ bezogen. Sei $\mathfrak{K}$ eine Kreisfläche vom Radius R in $\mathfrak{E}$, deren

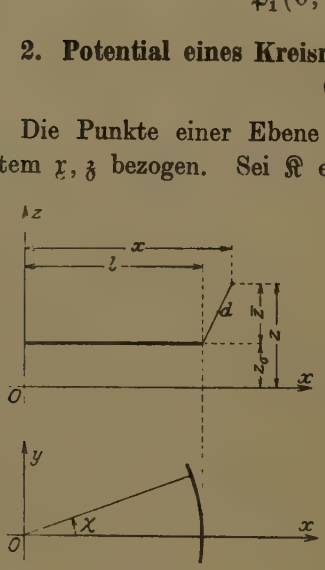


Fig. 1.

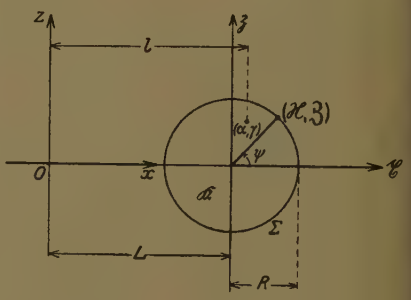


Fig. 2.

Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist. Die Ebene $\mathfrak{E}$ sei zugleich die Ebene $y = 0$ eines räumlichen Koordinatensystems x, y, z, das so gewählt ist (Fig. 2), daß in $\mathfrak{E}$

$$x = L + \mathfrak{x}, \quad z = \mathfrak{z} \tag{2}$$

gilt. Läßt man $\mathfrak{K}$ um die z-Achse rotieren, so erhält man einen Kreisringkörper T. Sei S die Oberfläche von T und Σ die Peripherie der Kreisfläche $\mathfrak{K}$. Das Newtonsche Potential $\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ von T in dem Punkte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ auf Σ läßt sich in der Form

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = \mathfrak{Q}_1\left(\frac{\mathfrak{x}}{L}, \frac{\mathfrak{z}}{L}\right) \log \frac{8L}{R} + \mathfrak{Q}_2\left(\frac{\mathfrak{x}}{L}, \frac{\mathfrak{z}}{L}\right) \tag{3}$$

darstellen, unter $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ Potenzreihen verstanden, die für hinreichend kleine Werte von $\left|\frac{\mathfrak{x}}{L}\right|$ und $\left|\frac{\mathfrak{z}}{L}\right|$ konvergieren[8]).

Es gilt

$$\mathfrak{Q}_2(0, 0) = 0. \tag{4}$$

[7]) Der Beweis findet sich in § 1 des zweiten Kapitels.

[8]) Der Beweis findet sich in dem § 2 des zweiten Kapitels.

chreibt man

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = \mathfrak{Q}_1\left(\frac{R}{L}\cos\psi, \frac{R}{L}\sin\psi\right)\log\frac{8L}{R} + \mathfrak{Q}_2\left(\frac{R}{L}\cos\psi, \frac{R}{L}\sin\psi\right) \quad \left(\cos\psi = \frac{\mathfrak{X}}{R},\ \sin\psi = \frac{\mathfrak{Z}}{R}\right),$$

sieht man unmittelbar, daß man auch $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ als Funktionen des arameters $\frac{R}{L}$ auffassen kann, die für hinreichend kleine Werte von $\left|\frac{R}{L}\right|$, etwa

$$\left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_0$$

nalytisch und regulär sind. Es gilt, nach $\frac{R}{L}$ geordnet,

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = 2\pi R^2\log\frac{8L}{R} - \frac{\mathfrak{X}}{L}\pi R^2\log\frac{8L}{R} + \frac{5}{4}\frac{\mathfrak{X}}{L}\pi R^2 + \pi R^2\frac{R^2}{L^2}\left(\frac{3}{4}\frac{\mathfrak{X}^2}{R^2} - \frac{1}{16}\right)\log\frac{8L}{R} + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)^{8),9)}.$$

s gilt ferner

$$\begin{cases} \mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = \dfrac{B_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n\cos n\psi, \\ \dfrac{B_0}{2} = \pi R^2\left(2 + \dfrac{5R^2}{16L^2}\right)\log\dfrac{8L}{R} + \mathfrak{w}_0, & \mathfrak{w}_0 = O\left(\dfrac{R^2}{L^2}\right), \\ B_1 = -\pi R^2\dfrac{R}{L}\left(\log\dfrac{8L}{R} - \dfrac{5}{4}\right) + \mathfrak{w}_1, & \mathfrak{w}_1 = O\left(\dfrac{R^2}{L^2}\right), \\ B_2 = \dfrac{3}{8}\pi R^2\dfrac{R^2}{L^2}\log\dfrac{8L}{R} + \mathfrak{w}_2, & \mathfrak{w}_2 = O\left(\dfrac{R^2}{L^2}\right), \\ B_n = O\left(\dfrac{R^2}{L^2}\right), & (n > 2). \end{cases}$$

ffenbar sind alle B_n von der Form

$$B_n = B_n'\log\frac{8L}{R} + B_n'',$$

nter B_n' und B_n'' Funktionen des Parameters $\frac{R}{L}$ verstanden, die für $\left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_0$ analytisch und regulär sind.

Wir schreiben:

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = \frac{B_0}{2} + B_1\cos\psi + B_2\cos 2\psi + \mathfrak{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}).$$

---

9) Unter $O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)$ wird unter Anlehnung an eine bekannte Schreibweise eine Funktion verstanden, die der Ungleichheit

$$O\left(\frac{R^2}{L^2}\right) < C_0\frac{R^2}{L^2} \qquad (C_0 \text{ konstant})$$

enügt.

Natürlich kann auch

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \log \frac{8L}{R} + \mathfrak{B}'' \tag{11}$$

gesetzt werden, unter $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ Funktionen von $\frac{R}{L}$ verstanden, die für $\left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_0$ analytisch und regulär sind. Es gilt

$$\mathfrak{B}' = O\left(\frac{R^3}{L^3}\right), \quad \frac{d\mathfrak{B}'}{ds} = O\left(\frac{R^3}{L^3}\right), \quad \mathfrak{B}'' = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right), \quad \frac{d\mathfrak{B}''}{ds} = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right), \tag{12}$$

$$s = R\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right).$$

3. Potential eines beliebigen Rotationskörpers T_1 in der Nachbarschaft des Kreisringkörpers T in einem Punkte seiner Oberfläche S_1.

Sei S_1 eine Rotationsfläche um die z-Achse in der Nachbarschaft erster Ordnung von S (Fig. 3). Der von S_1 begrenzte Körper heiße T_1. Wir denken uns die Lage der Punkte auf S auf ein geeignetes System

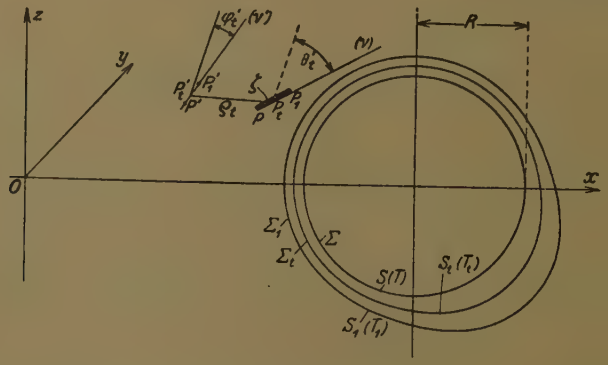


Fig. 3.

Gaußscher Parameter ξ und η bezogen. Sei $P(\xi, \eta)$ irgendein Punkt auf S, (ν) die nach außen gerichtete Normale in P. Den soeben gemachten Annahmen gemäß, wird S_1 von (ν) nur in einem Punkte P_1 getroffen. Die Strecke PP_1, positiv in der positiven Richtung von (ν) gerechnet, bezeichnen wir mit ζ. Offenbar können wir die Punkte von S_1 auf das krummlinige Koordinatensystem ξ, η, ζ beziehen und entsprechend für $P(\xi, \eta)$ auch $P(\xi, \eta, 0)$ setzen. Sei $U(\xi, \eta)$ das Newtonsche Potential des Körpers T in (ξ, η)[10]), $U_1(\xi, \eta)$ dasjenige von T_1 in P_1. Für die Differenz

$$U_1(\xi, \eta) - U(\xi, \eta)$$

[10]) Offenbar ist $U(\xi, \eta) = \mathfrak{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$, wenn ξ, η die Gaußschen Parameter des Punktes $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ sind. Es seien $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1$ die Koordinaten des Punktes P_1. Offenbar ist $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)$, $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)$.

be ich in meinen vor einiger Zeit veröffentlichten Arbeiten über die eichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten Formeln angegeben, die für weiteren Betrachtungen dieser Arbeit wesentlich sind[11]). Ich schalte ischen S und S_1 eine stetige Schar geschlossener Rotationskörper S_t, ren Punkte die krummlinigen Koordinaten $\xi, \eta, t\zeta$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ haben. U_t das Newtonsche Potential des von S_t begrenzten Rotationskörpers im Punkte $P_t(\xi, \eta, t\zeta)$ auf (ν). Offenbar kann

$$U_1(\xi, \eta) - U(\xi, \eta) = \int_0^1 \frac{\partial U_t}{\partial t} dt \tag{3}$$

etzt werden. Es gilt ferner

$$\frac{\partial U_t}{\partial t} = \int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t} (\zeta' \cos \varphi_t' - \zeta \cos \theta_t') \, d\sigma_t' \text{ [12])}. \tag{4}$$

er bezeichnen: $P(\xi, \eta)$ einen festen, $P'(\xi', \eta')$ einen variablen Punkt S, $d\sigma'$ das Flächenelement von S in (ξ', η'), $d\sigma_t'$ das zugehörige ement auf S_t, ϱ_t den Abstand der Punkte $P_t(\xi, \eta, t\zeta)$ und $P_t'(\xi', \eta', t\zeta')$ S_t, schließlich φ_t' und θ_t' die von der Außennormale von S_t in $\eta'; t\zeta')$ mit (ν') und (ν) eingeschlossenen Winkel.

Da T_1 ein Rotationskörper ist, so genügt es, U_1 für die Punkte P_1 in der Ebene $y = 0$ gelegenen Meridianschnittes Σ_1 von S_1 zu bemmen. Es seien Σ und Σ_t die Schnittlinien der Ebene $y = 0$ und der ächen S und S_t.

Wir wählen als Parameter ξ, η die Bogenlänge s des Kreises Σ, von m Punkte $\mathfrak{X} = 0$, $\mathfrak{Z} = R$ ab, im Sinne der Uhrzeigerbewegung gemessen ig. 4), und den Azimutwinkel χ. Der Ebene $y = 0$ entspricht der Wert $= 0$. Die Koordinaten der Punkte P und P' sind demnach jetzt

$$P \ldots \xi = s, \eta = 0; \zeta = 0, \qquad P' \ldots \xi' = s', \eta' = \chi'; \zeta' = 0.$$

sei $\bar{P}_t'$ der Punkt auf Σ_t, der in P_t' übergeht, wenn T_t' um die

---

[11]) Vgl. loc. cit. [4]), I. Abh. S. 239–245, II. Abh. S. 140–145. Diese Formeln ren zu Reihenentwicklungen, die in dem besonderen Falle der Jacobischen und claurinschen Ellipsoide bereits früher von Liapounoff angegeben und in seiner annten erschöpfenden Behandlung dieser Gleichgewichtsfiguren benutzt worden l. Man vgl. A. Liapounoff, Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipes d'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de rotation. Première tie. Etude générale du problème. Mémoire présentée à l'Académie des sciences 06), S. 1–225 (insb. S. 3–22).

[12]) An der in der Fußnote [11]) genannten Stelle waren S und S_1 nicht notwendig ationsflächen. Dagegen wurde dort angenommen, daß T eine Gleichgewichtsfigur erender Flüssigkeiten ist. Diese Voraussetzung ist indessen bei der Ableitung der mel (14) tatsächlich nicht benutzt worden.

z-Achse durch den Winkel χ' gedreht wird (Fig. 4). Offenbar hat $\overline{P}_t'$ die Koordinaten $s', 0; t\zeta'$. Sein Abstand von der z-Achse heiße l_t'[13]). Analog ist $\overline{P}'(s', 0; 0)$ der Punkt, der bei der vorerwähnten Drehung in $P'(s', \chi'; 0)$ übergeht. Seinen Abstand von der z-Achse bezeichnen wir mit l'. Wir bezeichnen ferner den Winkel, den die Außennormale in $\overline{P}_t$ an S_t mit der z-Achse einschließt, mit τ_t'. Für $t = 0$ geht τ_t' in $\tau' = \frac{\pi'}{R}$ über. Es sei endlich ϑ_t' der Winkel, den die vorerwähnte Normale mit der Normale (ν) in P an S bildet. Für $\chi' = 0$ geht θ_t' in ϑ_t' über. Wir bemerken endlich, daß die Normalen in $\overline{P}_t'$ an Σ_t und Σ denselben Winkel φ_t' einschließen, den die Normalen an S_t und S in P_t' bilden.

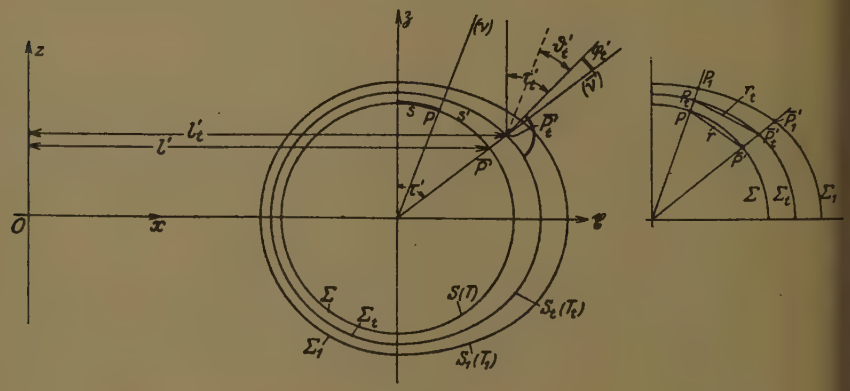


Fig. 4.

Wie man sich leicht überzeugt, ist

$$(15)\quad \begin{aligned}\cos\theta_t' &= \cos\tau_t'\cos\tfrac{s}{R} + \sin\tau_t'\cos\chi'\sin\tfrac{s}{R}\\ &= \cos\tau_t'\cos\tfrac{s}{R} + \sin\tau_t'\sin\tfrac{s}{R} + \sin\tau_t'\sin\tfrac{s}{R}(\cos\chi' - 1)\\ &= \cos\left(\tau_t' - \tfrac{s}{R}\right) - 2\sin\tau_t'\sin\tfrac{s}{R}\sin^2\tfrac{\chi'}{2} = \cos\vartheta_t' - 2\sin\tau_t'\sin\tfrac{s}{R}\sin^2\tfrac{\chi'}{2}\end{aligned}$$ [14])

und darum wegen (14)

$$(16)\quad \begin{aligned}\frac{\partial U_t}{\partial t} &= \int_{S_t}\frac{1}{\varrho_t}(\zeta'\cos\varphi_t' - \zeta\cos\vartheta_t')\,d\sigma_t'\\ &\quad + 2\zeta\sin\tfrac{s}{R}\int_{S_t}\sin\tau_t'\sin^2\tfrac{\chi'}{2}\,\frac{d\sigma_t'}{\varrho_t} = \Delta_1 + \Delta_2.\end{aligned}$$

[13]) Ebenso sollen l und l_t die Abstände der Punkte P und P_t von der z-Achse bezeichnen.

[14]) Die Richtungskosinusse von (ν) sind in der Tat $\sin\frac{s}{R}$, 0, $\cos\frac{s}{R}$, diejenigen der Normale in P_t' an S_t sind $\sin\tau_t'\cos\chi'$, $\sin\tau_t'\sin\chi'$, $\cos\tau_t'$.

Sei r_t der Abstand der Punkte $P_t(s, 0; t\zeta)$ und $\overline{P}_t'(s', 0; t\zeta')$ auf . Für $t=0$ geht r_t in r, den Abstand der Punkte $P(s, 0; 0)$ und $'(s', 0; 0)$ über.

Nach (16) und (1) ist, wenn man die kartesischen Koordinaten der unkte P_t und $\overline{P}_t'$ entsprechend mit $\mathfrak{x}_t$, $\mathfrak{z}_t$ und $\mathfrak{x}_t'$, $\mathfrak{z}_t'$ bezeichnet,

$$\Delta_1 = \int_{\Sigma_t} (\zeta' \cos\varphi_t' - \zeta \cos\vartheta_t') \Big\{ 2 \log \frac{8 l_t'}{r_t} + \log \frac{8 l_t'}{r_t} \mathfrak{P}_1\Big(\frac{\mathfrak{x}_t - \mathfrak{x}_t'}{l_t'}, \frac{\mathfrak{z}_t - \mathfrak{z}_t'}{l_t'}\Big) + \mathfrak{P}_2\Big(\frac{\mathfrak{x}_t - \mathfrak{x}_t'}{l_t'}, \frac{\mathfrak{z}_t - \mathfrak{z}_t'}{l_t'}\Big)\Big\} ds_t' \quad (17)$$

[15]),

wofür man nach einer leichten Umrechnung auch setzen kann

$$\Delta_1 = 2 \int_{\Sigma_t} (\zeta' \cos\varphi_t' - \zeta \cos\vartheta_t') \log \frac{8L}{r_t} ds_t'$$

$$+ \int_{\Sigma_t} (\zeta' \cos\varphi_t' - \zeta \cos\vartheta_t') \Big[\mathfrak{P}_1\Big(\frac{\mathfrak{x}_t - \mathfrak{x}_t'}{l_t'}, \frac{\mathfrak{z}_t - \mathfrak{z}_t'}{l_t'}\Big) \log \frac{8 l_t'}{r_t} + \mathfrak{P}_2\Big(\frac{\mathfrak{x}_t - \mathfrak{x}_t'}{l_t'}, \frac{\mathfrak{z}_t - \mathfrak{z}_t'}{l_t'}\Big) + 2 \log \frac{l_t'}{L} \Big] ds_t' = \Delta_3 + \Delta_4. \quad (18)$$

Es gilt nun weiter

$$\Delta_3 = 2 \int_{\Sigma_t} (\zeta' \cos\varphi_t' - \zeta \cos\vartheta_t') \log \frac{R}{r_t} ds_t'$$

$$+ 2 \log \frac{8L}{R} \int_{\Sigma_t} (\zeta' \cos\varphi_t' - \zeta \cos\vartheta_t') ds_t' = \Delta_3' + \Delta_3'', \quad (19)$$

$$\int_{\Sigma_t} \zeta \cos\vartheta_t' ds_t' = \zeta \int_{\Sigma_t} \cos\vartheta_t' ds_t' = 0, \quad (20)$$

daraus

$$\int_0^1 \Delta_3'' dt = 2 \log \frac{8L}{R} \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t} \zeta' \cos\varphi_t' ds_t' = 2\Theta^* \log \frac{8L}{R}, \quad (21)$$

unter Θ^* den Flächeninhalt des von Σ und Σ_1 begrenzten Flächenstückes verstanden.

---

[15]) Es sei daran erinnert, daß

$$\mathfrak{P}_1(0, 0) = \mathfrak{P}_2(0, 0) = 0 \quad (22)$$

Wegen (13), (16), (18), (19) und (21) ist also

$$(23)\quad U_1(\xi,\eta)-U(\xi,\eta)=\int_0^1 \Delta_3' dt+\int_0^1 \Delta_3'' dt+\int_0^1 \Delta_4 dt+\int_0^1 \Delta_2 dt$$

$$=2\int_0^1 dt\int_{S_t'}(\zeta'\cos\varphi_t'-\zeta\cos\vartheta_t')\log\frac{R}{r_t}ds_t'+2\Theta^*\log\frac{8L}{R}$$

$$+\int_0^1 dt\int_{S_t'}(\zeta'\cos\varphi_t'-\zeta\cos\vartheta_t')\left\{\mathfrak{P}_1\left(\frac{\xi_t-\xi_t'}{l_t'},\frac{\vartheta_t-\vartheta_t'}{l_t'}\right)\log\frac{8l_t'}{r_t}\right.$$

$$\left.+\mathfrak{P}_2\left(\frac{\xi_t-\xi_t}{l_t'},\frac{\vartheta_t-\vartheta_t'}{l_t'}\right)+2\log\frac{l_t'}{L}\right\}ds_t'$$

$$+2\zeta\sin\frac{s}{R}\int_0^1 dt\int_{S_t'}\sin\tau_t'\sin^2\frac{\chi'}{2}\frac{do_t'}{\varrho_t}.$$

4. Potential des Rotationskörpers T_1 in einem Punkte seiner Oberfläche S_1 (Fortsetzung).

1. Der Ausdruck $\int_0^1 \Delta_3' dt$ läßt sich für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen reellen oder komplexen Werte von ζ, $\frac{d\zeta}{ds}$, etwa

$$(24)\qquad |\zeta|,\ \left|\frac{d\zeta}{ds}\right|<\varepsilon,$$

in eine unendliche Reihe von der Form

$$(25)\qquad \mathfrak{U}^{(1)}+\mathfrak{U}^{(2)}+\mathfrak{U}^{(3)}+\ldots$$

entwickeln; $\mathfrak{U}^{(n)}$ bezeichnet hier einen Integralausdruck n-ten Grades über ζ, ζ', $\frac{d\zeta'}{ds'}$ [16]). Es gilt

$$(26)\qquad \mathfrak{U}^{(n)}=\frac{2}{n!}\int_{S'}\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[(\zeta'\cos\varphi_t'-\zeta\cos\vartheta_t')\log\frac{R}{r_t}\right]\frac{ds_t'}{ds'}\right\}_{t=0}ds',$$

insbesondere

$$(27)\qquad \mathfrak{U}^{(1)}=-2\pi R\zeta+2\int_{S'}\zeta'\log\frac{R}{r}ds'\ [17]).$$

---

[16]) Wird ζ durch $\alpha\zeta$ ersetzt, so erhält $\mathfrak{U}^{(n)}$ den Faktor α^n. Die Ableitung $\frac{d\zeta}{ds}$ tritt übrigens in $\mathfrak{U}^{(n)}$ nur linear auf.

[17]) Man vergleiche den Beweis in § 3 des zweiten Kapitels.

Setzt man

28) $$\mathfrak{U}^{(2)} + \mathfrak{U}^{(3)} + \ldots = \Omega^{(1)}\{\zeta\}.$$

gelten die für das folgende wesentlichen Beziehungen

29) $$|\Omega^{(1)}|, \left|\frac{d\Omega^{(1)}}{ds}\right| < \alpha_1 \varepsilon^2,$$

nter α_1 eine positive Konstante verstanden, wie später auch unter $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$.

Es sei $\dot{\zeta}$ eine andere nebst ihrer Ableitung stetige Funktion auf Σ, ie den Ungleichheiten

30) $$|\dot{\zeta}|, \left|\frac{d\dot{\zeta}}{ds}\right| < \varepsilon$$

enügt, und es möge

31) $$|\zeta - \dot{\zeta}|, \left|\frac{d\zeta}{ds} - \frac{d\dot{\zeta}}{ds}\right| < \mathsf{m}$$

ein. Dann ist

32) $$|\Omega^{(1)}\{\zeta\} - \Omega^{(1)}\{\dot{\zeta}\}|, \left|\frac{d}{ds}\Omega^{(1)}\{\zeta\} - \frac{d}{ds}\Omega^{(1)}\{\dot{\zeta}\}\right| < \alpha_2 \varepsilon \mathsf{m}$$ [17]).

2. Wie in § 4 des zweiten Kapitels gezeigt werden wird, läßt sich $\Delta_4\, dt$ für alle hinreichend kleinen Werte von $|\zeta|$, $\left|\frac{d\zeta}{ds}\right|$ und $\left|\frac{R}{L}\right|$, etwa

33) $$|\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{ds}\right| \leqq \varepsilon_1 \leqq \varepsilon, \qquad \left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_1 \leqq h_0$$

eine unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe

34) $$\int_0^1 \Delta_4\, dt = \mathfrak{U}_*^{(1)} + \mathfrak{U}_*^{(2)} + \ldots$$

ntwickeln; $\mathfrak{U}_*^{(n)}$ ist wie $\mathfrak{U}^{(n)}$ ein Integralausdruck n-ten Grades über $\zeta', \frac{d\zeta'}{ds'}$. Es gilt ferner

35) $$\mathfrak{U}_*^{(n)} = \mathfrak{L}_1^{(n)} \log \frac{8L}{R} + \mathfrak{L}_2^{(n)},$$

o $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ im Gebiete $\left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_1$ analytische und reguläre Funktionen es Parameters $\frac{R}{L}$ bezeichnen [18]).

Setzt man zur Vereinfachung

36) $$\mathfrak{U}_*^{(1)} + \mathfrak{U}_*^{(2)} + \ldots = \Omega^{(2)}\{\zeta\},$$

findet man

37) $$|\Omega^{(2)}|, \left|\frac{d}{ds}\Omega^{(2)}\right| < \alpha_3 \varepsilon_1 \left|\frac{R}{L} \log \frac{8L}{R}\right|.$$

[18]) Übrigens konvergieren auch die beiden Reihen $\Sigma \mathfrak{L}_1^{(n)}$ und $\Sigma \mathfrak{L}_2^{(n)}$ unbedingt nd gleichmäßig.

Sind auch die Ungleichheiten

$$|\dot{\zeta}|,\ \left|\frac{d\dot{\zeta}}{ds}\right| < \varepsilon_1 \tag{38}$$

erfüllt, so gilt ferner

$$|\Omega^{(2)}\{\zeta\} - \Omega^{(2)}\{\dot{\zeta}\}|,\ \left|\frac{d}{ds}\Omega^{(2)}\{\zeta\} - \frac{d}{ds}\Omega^{(2)}\{\dot{\zeta}\}\right| < \alpha_4 \mathfrak{m}\left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right|. \tag{39}$$

3. Was nun endlich den Ausdruck $\int_0^1 \Delta_2\, dt$ betrifft, so gilt hier die für

$$|\zeta|,\left|\frac{d\zeta}{ds}\right| \leqq \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_1 \leqq \varepsilon, \qquad \left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_2 \leqq h_1 \leqq h_0 \tag{40}$$

unbedingt und gleichmäßig konvergierende Entwicklung

$$\int_0^1 \Delta_2\, dt = {}_*\mathfrak{U}^{(1)} + {}_*\mathfrak{U}^{(2)} + \ldots, \tag{41}$$

unter ${}_*\mathfrak{U}^{(n)}$ wieder einen Integralausdruck n-ten Grades über ζ, ζ', $\frac{d\zeta'}{ds'}$ verstanden. Es gilt ferner

$${}_*\mathfrak{U}^{(n)} = \mathfrak{D}_1^{(n)} \log\frac{8L}{R} + \mathfrak{D}_2^{(n)}. \tag{42}$$

Hier sind $\mathfrak{D}_1^{(n)}$, $\mathfrak{D}_2^{(n)}$ gewisse Funktionen des Parameters $\frac{R}{L}$, die sich im Gebiete (40) analytisch und regulär verhalten[19]). Setzt man zur Vereinfachung

$${}_*\mathfrak{U}^{(1)} + {}_*\mathfrak{U}^{(2)} + \ldots = \Omega^{(3)}\{\zeta\}, \tag{43}$$

so findet man

$$|\Omega^{(3)}\{\zeta\}|,\ \left|\frac{d}{ds}\Omega^{(3)}\{\zeta\}\right| < \alpha_5 \varepsilon_2 \left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right|. \tag{44}$$

Sind auch die Ungleichheiten

$$|\dot{\zeta}|,\ \left|\frac{d\dot{\zeta}}{ds}\right| < \varepsilon_2 \tag{45}$$

erfüllt, so gilt ferner

$$|\Omega^{(3)}\{\zeta\} - \Omega^{(3)}\{\dot{\zeta}\}|,\ \left|\frac{d}{ds}\Omega^{(3)}\{\zeta\} - \frac{d}{ds}\Omega^{(3)}\{\dot{\zeta}\}\right| < \alpha_6 \mathfrak{m}\left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right|. \tag{46}$$

5. Potential des Rotationskörpers T_1 in einem Punkte seiner Oberfläche S_1 (Schluß).

Wir fassen jetzt die Ergebnisse der bisherigen Betrachtungen zusammen. Aus (23), (25), (27), (34) und (41) folgt, wenn man

$$\mathfrak{U}^{(n)} + \mathfrak{U}_*^{(n)} + {}_*\mathfrak{U}^{(n)} = U_*^{(n)} \qquad (n > 1) \tag{47}$$

setzt,

---

[19]) Die unendlichen Reihen $\Sigma\mathfrak{D}_1^{(n)}$, $\Sigma\mathfrak{D}_2^{(n)}$ konvergieren unbedingt und gleichmäßig.

$$U_1(\xi,\eta)-U(\xi,\eta)=-2\pi R\zeta+2\int_{\Sigma}\zeta'\log\frac{R}{r}ds'+2\Theta^*\log\frac{8L}{R}$$
$$+\mathfrak{U}_*^{(1)}+{}_*\mathfrak{U}^{(1)}+U_*^{(2)}+U_*^{(3)}+\dots\,.$$

Die unendliche Reihe rechterhand konvergiert für

$$|\zeta|,\ \left|\frac{d\zeta}{ds}\right|\leqq\varepsilon_2,\qquad \left|\frac{R}{L}\right|\leqq h_2$$

bedingt und gleichmäßig. Jedes Glied der Reihe kann in der Form

$$\mathfrak{E}_1^{(n)}\log\frac{8L}{R}+\mathfrak{E}_2^{(n)}\qquad(n\geqq 2)$$

rgestellt werden, unter $\mathfrak{E}_1^{(n)}$ und $\mathfrak{E}_2^{(n)}$ Funktionen von $\frac{R}{L}$ verstanden, die (49) analytisch und regulär sind.

Setzt man

$$\mathfrak{U}_*^{(1)}+{}_*\mathfrak{U}^{(1)}+U_*^{(2)}+U_*^{(3)}+\dots=\Omega_*\{\zeta\},$$

ist

$$|\Omega_*|,\ \left|\frac{d}{ds}\Omega_*\right|<\alpha_7\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_2\left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right|\right)$$

d

$$|\Omega_*\{\zeta\}-\Omega_*\{\dot\zeta\}|,\ \left|\frac{d}{ds}\Omega_*\{\zeta\}-\frac{d}{ds}\Omega_*\{\dot\zeta\}\right|<\alpha_7\,\mathfrak{m}\left(\varepsilon_2+\left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right|\right).$$

Aus (10), (8) und (48) folgt jetzt[20])

$$\boxed{\begin{aligned}U_1(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{z}_1)&=\frac{B_0}{2}+B_1\cos\psi+B_2\cos 2\psi+\mathfrak{B}(\mathfrak{x},\mathfrak{z})-2\pi R\zeta\\&+2\int_{\Sigma}\zeta'\log\frac{R}{r}ds'+\Theta^*\log\frac{8L}{R}+\mathfrak{U}_*^{(1)}+{}_*\mathfrak{U}^{(1)}+U_*^{(2)}+U_*^{(3)}+\dots,\end{aligned}}$$

$$\frac{B_0}{2}=\pi R^2\left(2+\frac{5R^2}{16L^2}\right)\log\frac{8L}{R}+\mathfrak{w}_0,\qquad \mathfrak{w}_0=O\left(\frac{R^2}{L^2}\right),$$

$$B_1=-\pi R^2\frac{R}{L}\left(\log\frac{8L}{R}-\frac{5}{4}\right)+\mathfrak{w}_1,\qquad \mathfrak{w}_1=O\left(\frac{R^2}{L^2}\right),$$

$$B_2=\frac{3}{8}\pi R^2\frac{R^2}{L^3}\log\frac{8L}{R}+\mathfrak{w}_2,\qquad \mathfrak{w}_2=O\left(\frac{R^2}{L^2}\right),$$

$$B_n=O\left(\frac{R^2}{L^2}\right),\qquad(n>2).$$

[20]) Wir schreiben, wenn $(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{z}_1)$ die Koordinaten des Punktes P_1 auf Σ_1 bezeichnen, $U_1(\xi,\eta)$ auch $U_1(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{z}_1)$.

§ 2.

Die fundamentale Integro-Differentialgleichung des Problems.

Das Potential der Zentrifugalkraft im Punkte

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}\left(1+\frac{\zeta}{R}\right), \qquad \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}\left(1+\frac{\zeta}{R}\right) \tag{56}$$

auf Σ_1 ist, wenn die Winkelgeschwindigkeit mit ω bezeichnet wird,

$$U_1^c(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) = \frac{\omega^2}{2}\left(L^2 + 2L\mathfrak{X} + 2L\mathfrak{X}\frac{\zeta}{R} + \mathfrak{X}^2\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)^2\right). \tag{57}$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet nun, wenn unter $\varkappa$ die Gaußsche Gravitationskonstante verstanden wird, einfach

$$U_1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) + \frac{1}{\varkappa f} U_1^c(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) + c^* = 0\,^{21}), \qquad (c^* \text{ konstant}) \tag{58}$$

oder, anders geschrieben,

$$\begin{aligned} 2\pi R\zeta - 2\int_{\Sigma} \zeta' \log\frac{R}{r}\,ds' = {} & c^* + \frac{B_0}{2} + B_1\cos\psi + B_2\cos 2\psi \\ & + \mathfrak{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) + \Theta^* \log\frac{8L}{R} + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left(L^2 + 2L\mathfrak{X} + 2L\mathfrak{X}\frac{\zeta}{R} + \mathfrak{X}^2\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)^2\right) \\ & + \mathfrak{U}_*^{(1)} + {}_*\mathfrak{U}^{(1)} + U_*^{(2)} + U_*^{(3)} + \ldots. \end{aligned} \tag{59}$$

Die homogene Integralgleichung

$$\zeta - \frac{1}{\pi R}\int_{\Sigma} \zeta' \log\frac{R}{r}\,ds' = 0 \tag{60}$$

hat zwei linear unabhängige Eigenfunktionen

$$u_1 = \frac{\sin\psi}{\sqrt{\pi R}}, \qquad u_3 = \frac{\cos\psi}{\sqrt{\pi R}}\,^{22}). \tag{61}$$

Wir setzen

$$\frac{1}{\pi R}\log\frac{R}{r} = u_1 u_1' + u_3 u_3' + N(s, s')\,^{23}) \tag{62}$$

und erhalten

$$\zeta - \frac{1}{\pi R}\int_{\Sigma} \zeta' \log\frac{R}{r}\,ds' = \zeta - u_1\int_{\Sigma} u_1'\zeta'\,ds' - u_3\int_{\Sigma} u_3'\zeta'\,ds' - \int_{\Sigma} N\zeta'\,ds'. \tag{63}$$

Der Kern N hat keine Nullösungen mehr.

---

[21]) In (58) ist f die Dichte der Flüssigkeit.

[22]) Die Bezeichnungen sind den loc. cit.[4]) gebrauchten angepaßt. Es gilt

$$\int_{\Sigma} u_1^2\,ds = \int_{\Sigma} u_3^2\,ds = 1. \tag{62}$$

Dort sind freilich die Nullösungen der zu (60) analogen Integralgleichung etwas anders normiert.

[23]) Wir schreiben zur Abkürzung für $u_1(s')$, $u_3(s')$ entsprechend u_1' und u_3'.

Wie ich an einer anderen Stelle bewiesen habe, hat jede Gleichgechtsfigur rotierender homogener Flüssigkeiten eine auf der Rotationshse senkrecht stehende Symmetrieebene[24]). Wir denken uns den Körper so orientiert, daß diese Symmetrieebene in die Ebene $z = 0$ fällt[25]). sdann ist

4) $$\int_{\Sigma} u_1' \zeta' ds' = 0.$$

Wir werden jetzt die Winkelgeschwindigkeit ω und die Konstante c^* bestimmen, daß der Ausdruck

5) $$\int_{\Sigma} u_3' \zeta' ds' = 0$$

rd.

Wir setzen, um dies zu erreichen, *unter w einen noch zu bestimmenn Parameter verstanden,*

6) $$\frac{\omega^2}{\varkappa f} L - \pi R \frac{R}{L}\left(\log\frac{8L}{R} - \frac{5}{4}\right) + \frac{\mathfrak{w}_1}{R} - \frac{w}{R} = 0,$$

ithin

7) $$\frac{\omega^2}{\varkappa f} = \pi \frac{R^2}{L^2}\left(\log\frac{8L}{R} - \frac{5}{4}\right) - \frac{\mathfrak{w}_1}{RL} + \frac{w}{RL}$$

d

8) $$c^* + \Theta^* \log\frac{8L}{R} + \pi R^2\left(2 + \frac{5R^2}{16L^2}\right)\log\frac{8L}{R} + \mathfrak{w}_0 + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left(L^2 + \frac{1}{2}R^2\right) = 0$$

d finden nach einer leichten Umformung

9) $$\begin{aligned} 2\pi R\zeta - 2\pi R \int_{\Sigma} N\zeta' ds' &= w\cos\psi + \left(B_2 + \frac{\omega^2 R^2}{4\varkappa f}\right)\cos 2\psi \\ &+ \mathfrak{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\left(2L\mathfrak{X}\frac{\zeta}{R} + 2\mathfrak{X}^2\frac{\zeta}{R} + \mathfrak{X}^2\frac{\zeta^2}{R^2}\right) \\ &+ \mathfrak{U}_*^{(1)} + {}_*\mathfrak{U}^{(1)} + U_*^{(2)} + U_*^{(3)} + \ldots . \end{aligned}$$

Dabei ist

0) $$B_2 + \frac{\omega^2 R^2}{4\varkappa f} = \frac{5\pi R^2}{16}\frac{R^2}{L^2}\left(2\log\frac{8L}{R} - 1\right) + \mathfrak{w}_2 - \frac{\mathfrak{w}_1 R}{4L} + \frac{wR}{4L}.$$

---

[24]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren ierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz ziehen, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. 48 (1918), 1120–1124.

[25]) Dies kann man nötigenfalls durch eine geeignete Verschiebung parallel zu z-Achse stets erreichen.

Der Parameter w ist in (69), wenn man von dem Ausdruck $w\cos\psi$ absieht, nur noch in dem zweiten Summanden und in den mit $\frac{\omega^2}{2\varkappa f}$ behafteten Gliedern vertreten; er ist, wie man sich leicht überzeugt, entsprechend mit den kleinen Größen $\frac{R}{L}$, ζ, $\frac{R}{L}\zeta$ und $\frac{R}{L}\zeta^2$ multipliziert.

Die rechte Seite von (69) ist eine Funktion der Parameter w, $w'=\frac{R}{L}$, $w''=\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}$, die sich für alle hinreichend kleinen Werte von $|w|, |w'|, |w''|$ analytisch und regulär verhält. Wie in meinen wiederholt zitierten Abhandlungen läßt sich zeigen, daß (69) für jeden Wertetripel w, w', w'' in einem Gebiete

$$|w|, |w'|, |w''| \leqq h_3 \leqq h_2 \tag{71}$$

eine und nur eine Lösung hat. Diese Lösung kann durch sukzessive Approximationen gewonnen und nach Potenzen von w, w', w'' entwickelt werden. Sie ist in bezug auf die Ebene $z=0$ symmetrisch[26]).

Für das Gelingen des Verfahrens ist wie dort das Bestehen gewisser Ungleichheiten entscheidend. Diese Ungleichheiten ergeben sich leicht aus den in § 1 zusammengestellten Beziehungen (11), (12), (52), (53), (55) und (67).

Wir bezeichnen vorübergehend die rechte Seite von (69) mit $\Pi\{\zeta\}$ und nehmen

$$|w| < \delta^*; \quad |\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{ds}\right| \leqq \varepsilon^* \leqq \varepsilon_2; \quad |w'| = \left|\frac{R}{L}\right| \leqq h^* \leqq h_2; \tag{72}$$
$$|w''| = \left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right| \leqq h^*$$

an. Alsdann ist, wie sich leicht zeigen läßt,

$$\left|\Pi\{\zeta\}\right|, \left|\frac{d}{ds}\Pi\{\zeta\}\right| \leqq \alpha_8(\delta^* + h^{*2} + h^*\delta^* + h^*\varepsilon^* + \varepsilon^*\delta^* + \varepsilon^{*2}). \tag{73}$$

Es gilt ferner, wenn auch

$$|\dot\zeta|, \left|\frac{d\dot\zeta}{ds}\right| \leqq \varepsilon^* \tag{74}$$

ist,

$$\left|\Pi\{\zeta\} - \Pi\{\dot\zeta\}\right|, \left|\frac{d}{ds}\Pi\{\zeta\} - \frac{d}{ds}\Pi\{\dot\zeta\}\right| < \alpha_9(h^* + \delta^* + \varepsilon^*)\,\mathfrak{m}. \tag{75}$$

Diese Ungleichheiten sind den entsprechenden Ungleichheiten der Abh. I und II ganz analog[27]).

---

[26]) Vgl. Abh. II, S. 156–165; Abh. I, S. 277–278.

[27]) Vgl. Abh. II S. 158 die Formel (13), S. 162 die Formeln (41) und (42).

Es ist nicht schwer, die ersten Glieder der Entwicklung von ζ zu timmen. Man findet

$$\zeta) \quad \zeta = \frac{w}{2\pi R}\cos\psi + \frac{1}{2\pi R}\frac{5\pi R^2}{16}\frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R}\cdot\cos 2\psi + \mathfrak{P}(w, w', w'').$$

In $\mathfrak{P}$ sind die von w freien Glieder von der Ordnung $\frac{R^2}{L^2}$, die Glieder der Form $f(s)\,w$ fehlen ganz.

Setzt man jetzt in die Beziehung

$$') \quad \int_{\underline{S}} u_3' \zeta'\, ds' = 0$$

ζ den Ausdruck (76) ein, so findet man wegen

$$') \quad \frac{1}{2\pi R}\int_{\underline{S}} \cos\psi' \cdot u_3'\, ds' = \frac{R}{2\pi R\sqrt{\pi R}}\int_0^{2\pi} \cos^2\psi'\, d\psi' = \frac{1}{2\sqrt{\pi R}},$$

$$\int_{\underline{S}} \cos 2\psi' \cdot u_3'\, ds' = 0$$

e Gleichung von der Form

$$') \quad \frac{1}{2\sqrt{\pi R}}\, w + \mathfrak{P}(w, w', w'') = 0,$$

der sich

$$) \quad w = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)$$

ibt. Demnach ist

$$) \quad \boxed{\zeta = \frac{5}{32} R \frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R}\cos 2\psi + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)}$$

mit Rücksicht auf (67) und (55)

$$) \quad \boxed{\frac{\omega^2}{\varkappa f} = \pi\frac{R^2}{L^2}\left(\log\frac{8L}{R} - \frac{5}{4}\right) + O\left(\frac{R^3}{L^3}\right).}$$

Da ζ in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch ist, so ist die iehung (64) erfüllt. Wegen (64) und (77) genügt der Wert (81) für er Integro-Differentialgleichung (59). *Der Körper T_1 ist eine ringnige Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit*[28]).

[28]) Das Hauptglied des Ausdruckes (82) rechts deckt sich mit dem Wert der kelgeschwindigkeit bei Tisserand, loc. cit. [2]) S. 154 und S. 167. Die von erand wiedergegebenen Rechnungen von Frau S. Kowalewski und H. Poincaré tten keine Abschätzung der höheren Glieder.

Auch der Ausdruck (81) für ζ stimmt, was die Größenordnung betrifft, mit von Tisserand loc. cit. [2]) S. 154 angegebenen Ausdruck überein. Der Zahlen-

Der vom Mittelpunkt des Kreises Σ nach dem Punkte $P_1(s, 0; \zeta)$ gezogene Radius-Vektor hat die Länge

$$\mathfrak{R} = R + \zeta = R + \frac{5}{32} R \frac{R^2}{L^2} \log \frac{8L}{R} \cos 2\psi + O\left(\frac{R^3}{L^2}\right). \tag{83}$$

Wie man leicht findet, ist

$$\mathfrak{R}^2 = R^2 + \frac{5}{16} R^2 \frac{R^2}{L^2} \log \frac{8L}{R} \cos 2\psi + O\left(\frac{R^3}{L^2}\right), \tag{84}$$

demnach

$$\mathfrak{R}^{-2} = R^{-2} - \frac{5}{16} R^{-2} \frac{R^2}{L^2} \log \frac{8L}{R} (\cos^2\psi - \sin^2\psi) + O\left(\frac{R^3}{L^2}\right), \tag{85}$$

oder auch

$$\mathfrak{R}^{-2} = \mathfrak{R}_*^{-2} + O\left(\frac{R^3}{L^2}\right),$$

$$\mathfrak{R}_*^{-2} = R^{-2}\left(1 + \frac{5}{32} \frac{R^2}{L^2} \log \frac{8L}{R}\right)^{-2} \cos^2\psi \tag{86}$$

$$+ R^{-2}\left(1 - \frac{5}{32} \frac{R^2}{L^2} \log \frac{8L}{R}\right)^{-2} \sin^2\psi.$$

Offenbar ist auch

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_* + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right). \tag{87}$$

Die Kurve, deren Polarkoordinaten $\mathfrak{R}_*$ und ψ sind, ist augenscheinlich eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\alpha = R\left(1 + \frac{5}{32} \frac{R^2}{L^2} \log \frac{8L}{R}\right), \qquad \beta = R\left(1 - \frac{5}{32} \frac{R^2}{L^2} \log \frac{8L}{R}\right).$$

Die große Achse ist nach der Rotationsachse hin gerichtet. Die Abplattung $\frac{\alpha - \beta}{\alpha}$ hat den Wert

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \frac{5}{16} \frac{R^2}{L^2} \log \frac{8L}{R} + O\left(\frac{R^3}{L^2}\right)^{29}).$$

---

koeffizient in (81) rechts ist von dem bei Tisserand auftretenden verschieden, doch weist Tisserand a. a. O. darauf hin, daß in den von ihm reproduzierten Rechnungen nicht alle in Betracht kommenden Glieder berücksichtigt worden sind.

[29]) Tisserand findet hier den Wert $\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{L^2} \log \frac{8L}{R} - \frac{5}{4}\right)$.

Zweites Kapitel.
Hilfssätze.

§ 1.

Das Newtonsche Potential einer Kreislinie[30].

In der Ebene $z = z_0$ eines kartesischen Koordinatensystems x, y, z ein mit Masse der Liniendichte 1 belegter Kreis vom Halbmesser l um n Koordinatenursprung gegeben (Fig. 1). Sein Newtonsches Potential Punkte $(x, 0, z)$ ist

$$\mathfrak{B} = l\int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{\bar{z}^2+(x-l\cos\chi)^2+l^2\sin^2\chi}} = l\int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{\bar{z}^2+x^2-2xl\cos\chi+l^2}}$$

$$= 2l\int_0^{\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{(x-l)^2+\bar{z}^2+4xl\sin^2\frac{\chi}{2}}}, \qquad (\bar{z}=z-z_0)$$

d mit $\chi = \pi - 2\bar{\chi}$

$$\mathfrak{B} = 4l\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\bar{\chi}}{\sqrt{(x-l)^2+\bar{z}^2+4xl\cos^2\bar{\chi}}}$$

$$= \frac{4l}{\sqrt{(x-l)^2+\bar{z}^2+4xl}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\bar{\chi}}{\sqrt{1-\frac{4xl}{(x-l)^2+\bar{z}^2+4xl}\sin^2\bar{\chi}}}.$$

Setzt man

$$k^2 = \frac{4xl}{(x-l)^2+\bar{z}^2+4xl}, \qquad k'^2 = 1-k^2 = \frac{(x-l)^2+\bar{z}^2}{(x-l)^2+\bar{z}^2+4xl},$$

findet man nach bekannten Legendreschen Formeln der Theorie iptischer Integrale für kleine $|k'|$

$$\mathfrak{B} = \frac{4l}{\sqrt{(x-l)^2+\bar{z}^2+4xl}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\bar{\chi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\bar{\chi}}}$$

$$= \frac{4l}{\sqrt{(x-l)^2+\bar{z}^2+4xl}}\left\{\left(1+\frac{1}{4}k'^2+\frac{9}{64}k'^4+\ldots\right)\log\frac{4}{k'}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}k'^2-\frac{21}{128}k'^4-\ldots\right\}^{31}.$$

---

[30]) Vgl. § 1 des ersten Kapitels, 1.

[31]) Man vergleiche z. B. F. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, Band II, ris 1891, S. 141.

Wir schreiben jetzt

$$d^2=(x-l)^2+\bar{z}^2, \qquad p=\frac{4l(x-l)+d^2}{4l^2} \tag{5}$$

und erhalten, wenn wir $|p|<1$ annehmen,

$$\frac{4l}{\sqrt{(x-l)^2+\bar{z}^2+4xl}}=4l\frac{1}{\sqrt{d^2+4l^2+4l(x-l)}}=\frac{2}{\sqrt{1+p}}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2}p+\frac{3}{8}p^2-\ldots\right), \tag{6}$$

$$k'^2=\frac{d^2}{d^2+4l^2+4l(x-l)}=\frac{d^2}{4l^2}\frac{1}{1+p}=\frac{d^2}{4l^2}(1-p+p^2-\ldots), \tag{7}$$

$$\log\frac{4}{k'}=\log 4-\frac{1}{2}\log k'^2=\log 4-\log\frac{d}{2l}+\frac{1}{2}\log(1+p)$$
$$=\log 4-\log\frac{d}{2l}+\frac{1}{2}\left(p-\frac{p^2}{2}+\frac{p^3}{3}-\ldots\right), \tag{8}$$

demnach

$$\mathfrak{B}=2\left(1-\frac{1}{2}p+\frac{3}{8}p^2-\ldots\right)\Big[\Big(-\log\frac{d}{2l}+\log 4+\frac{1}{2}p-\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{6}p^3-\ldots$$
$$\Big\{1+\frac{1}{4}\frac{d^2}{4l^2}(1-p+p^2-\ldots)+\frac{9}{64}\cdot\frac{d^4}{16l^4}(1-2p+3p^2-4p^3+\ldots)+\ldots\Big\} \tag{9}$$
$$-\frac{1}{4}\frac{d^2}{4l^2}(1-p+p^2-\ldots)-\frac{21}{128}\cdot\frac{d^4}{16l^4}(1-p+p^2-\ldots)^2-\ldots\Big]$$

oder, anders geordnet,

$$\mathfrak{B}=\log\frac{2l}{d}\left(2-p+\frac{d^2}{8l^2}+\frac{3}{4}p^2-\frac{3}{16}\frac{d^2}{l^2}p-\frac{5}{8}p^3+\ldots\right)$$
$$+\Big\{2\log 4+(1-\log 4)\left(p-\frac{d^2}{8l^2}\right)-p^2\left(1-\frac{3}{4}\log 4\right)+\frac{pd^2}{16l^2}(4-3\log 4) \tag{10}$$
$$+\left(\frac{11}{24}-\frac{5}{8}\log 4\right)p^3+\ldots\Big\}=2\log\frac{8l}{d}+\log\frac{8l}{d}\mathfrak{P}_1\left(\frac{x-l}{l},\frac{z-z_0}{l}\right)+\mathfrak{P}_2\left(\frac{x-l}{l},\frac{z-z_0}{l}\right)$$

Die Funktionen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sind für alle hinreichend kleinen Werte von $\left|\frac{x-l}{l}\right|$ und $\left|\frac{z-z_0}{l}\right|$ analytisch und regulär. Ferner ist

$$\mathfrak{P}_1(0,0)=\mathfrak{P}_2(0,0)=0.$$

§ 2.

Potential eines Kreisringkörpers in einem Punkte seiner Oberfläche[32]).

Die Punkte einer Ebene $\mathfrak{E}$ seien auf ein kartesisches Koordinatensystem ξ, ζ bezogen. Sei $\mathfrak{K}$ eine Kreisfläche vom Radius R in $\mathfrak{E}$, deren

[32]) Vgl. § 1 des ersten Kapitels, 2.

ittelpunkt der Koordinatenursprung ist. Die Ebene $\mathfrak{E}$ sei zugleich die bene $y = 0$ eines räumlichen Koordinatensystems x, y, z, das so gewählt t (Fig. 2), daß in $\mathfrak{E}$

1) $$x = L + \mathfrak{x}, \qquad z = \mathfrak{z}$$

lt. Läßt man $\mathfrak{K}$ um die z-Achse rotieren, so erhält man einen Kreisngkörper T. Sei S die Oberfläche von T und Σ die Peripherie des reises $\mathfrak{K}$.

Wir betrachten jetzt das Newtonsche Potential $\mathfrak{W}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ von T in em Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ auf Σ und beweisen vor allem, daß sich $\mathfrak{W}$ in der orm

12) $$\mathfrak{W}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}_1\left(\frac{\mathfrak{x}}{L}, \frac{\mathfrak{z}}{L}\right)\log\frac{8L}{R} + \mathfrak{Q}_2\left(\frac{\mathfrak{x}}{L}, \frac{\mathfrak{z}}{L}\right)$$

arstellen läßt, unter $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ Potenzreihen verstanden, die für hinichend kleine Werte von $\left|\frac{\mathfrak{x}}{L}\right|$, $\left|\frac{\mathfrak{z}}{L}\right|$ konvergieren.

Dies sieht man leicht wie folgt ein.

Sei (α, γ) irgendein Punkt von $\mathfrak{K}$ (Fig. 2) und $\mathfrak{V}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; \alpha, \gamma)$ das ewtonsche Potential der Kreislinie, die von (α, γ) bei der Rotation um ie z-Achse erzeugt wird, und die man sich mit der homogenen Masse er Dichte 1 belegt zu denken hat, im Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ auf Σ.

Nach (10) ist (Fig. 2)

13) $$\mathfrak{V}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; \alpha, \gamma) = 2\log\frac{8l}{d} + 2\log\frac{8l}{d}\mathfrak{P}_1\left(\frac{\mathfrak{x}-\alpha}{l}, \frac{\mathfrak{z}-\gamma}{l}\right) + \mathfrak{P}_2\left(\frac{\mathfrak{x}-\alpha}{l}, \frac{\mathfrak{z}-\gamma}{l}\right)$$

$$= 2\log\frac{8l}{d}\mathfrak{P}_3\left(\frac{\mathfrak{x}}{l}, \frac{\mathfrak{z}}{l}; \frac{\alpha}{l}, \frac{\gamma}{l}\right) + \mathfrak{P}_4\left(\frac{\mathfrak{x}}{l}, \frac{\mathfrak{z}}{l}; \frac{\alpha}{l}, \frac{\gamma}{l}\right), \quad d^2 = (\mathfrak{x}-\alpha)^2 + (\mathfrak{z}-\gamma)^2,$$

nter $\mathfrak{P}_3$ und $\mathfrak{P}_4$ Potenzreihen verstanden, die für alle hinreichend kleinen Verte von $\left|\frac{\mathfrak{x}}{l}\right|, \left|\frac{\mathfrak{z}}{l}\right|, \left|\frac{\alpha}{l}\right|, \left|\frac{\gamma}{l}\right|$ konvergieren.

Wegen

14) $$\frac{1}{l} = \frac{1}{L+\alpha} = \frac{1}{L}\left(1 - \frac{\alpha}{L} + \frac{\alpha^2}{L^2} - \cdots\right) = \frac{1}{L}\mathfrak{P}_5\left(\frac{\alpha}{L}\right)$$

nd

15) $$2\log\frac{8l}{d} = 2\log\frac{8L}{d} + \log\frac{L+\alpha}{L} = 2\log\frac{8L}{d} + \frac{\alpha}{L}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{L} + \frac{1}{3}\frac{\alpha^2}{L^2} - \cdots\right)$$

$$= 2\log\frac{8L}{d} + \frac{\alpha}{L}\mathfrak{P}_6\left(\frac{\alpha}{L}\right)$$

ann für (13) auch einfacher

16) $$\mathfrak{V}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; \alpha, \gamma) = 2\log\frac{8L}{d}\mathfrak{P}_7\left(\frac{\mathfrak{x}}{L}, \frac{\mathfrak{z}}{L}; \frac{\alpha}{L}, \frac{\gamma}{L}\right) + \mathfrak{P}_8\left(\frac{\mathfrak{x}}{L}, \frac{\mathfrak{z}}{L}; \frac{\alpha}{L}, \frac{\gamma}{L}\right)$$

esetzt werden. Aus (16) ergibt sich

17) $$\mathfrak{W}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = \int_{\mathfrak{K}} \mathfrak{V}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; \alpha, \gamma)\, d\alpha\, d\gamma = 2\int_{\mathfrak{K}} \log\frac{8L}{d}\,\mathfrak{P}_7\, d\alpha\, d\gamma + \int_{\mathfrak{K}} \mathfrak{P}_8\, d\alpha\, d\gamma.$$

Der zweite Summand rechter Hand läßt sich ohne weiteres in der Form $\mathfrak{Q}_3\left(\frac{\mathfrak{x}}{L}, \frac{\mathfrak{z}}{L}\right)$ darstellen. Betrachten wir jetzt den ersten Summanden etwas näher.

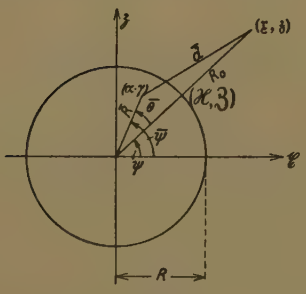


Fig. 5.

Sei

$$(18)\qquad \mathfrak{P}_7 = \sum a_{mnpq}\left(\frac{\mathfrak{x}}{L}\right)^m\left(\frac{\mathfrak{z}}{L}\right)^n\left(\frac{\alpha}{L}\right)^p\left(\frac{\gamma}{L}\right)^q,$$

und es möge etwa die Reihe

$$(19)\qquad \sum |a_{mnpq}|\,\underline{h}^{m+n+p+q} \qquad (\underline{h}>0)$$

konvergieren. Wir setzen (Fig. 5)

$$(30)\qquad \alpha = \bar{R}\cos\bar{\psi}, \qquad \gamma = \bar{R}\sin\bar{\psi}$$

und finden

$$\int_{\mathfrak{x}} \log\frac{8L}{d}\,\mathfrak{P}_7\,d\alpha\,d\gamma = \sum a_{mnpq}\left(\frac{\mathfrak{x}}{L}\right)^m\left(\frac{\mathfrak{z}}{L}\right)^n\int_{\mathfrak{x}}\left(\frac{\alpha}{L}\right)^p\left(\frac{\gamma}{L}\right)^q\log\frac{8L}{d}\,d\alpha\,d\gamma$$

$$(21)\qquad = \sum a_{mnpq}\left(\frac{\mathfrak{x}}{L}\right)^m\left(\frac{\mathfrak{z}}{L}\right)^n\int_0^R\left(\frac{\bar{R}}{L}\right)^{p+q}\bar{R}\,d\bar{R}\int_0^{2\pi}\cos^p\bar{\psi}\sin^q\bar{\psi}\log\frac{8L}{d}\,d\bar{\psi}.$$

Sei $(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ ein Punkt auf dem Halbmesser durch $(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ außerhalb des Kreises; seine Polarkoordinaten heißen R_0 und ψ. Augenscheinlich ist zunächst

$$(22)\qquad \int_0^R\left(\frac{\bar{R}}{L}\right)^{p+q}\bar{R}\,d\bar{R}\int_0^{2\pi}\cos^p\bar{\psi}\sin^q\bar{\psi}\log\frac{8L}{d}\,d\bar{\psi}$$

$$= \lim_{R_0=R}\int_0^R\left(\frac{\bar{R}}{L}\right)^{p+q}\bar{R}\,d\bar{R}\int_0^{2\pi}\cos^p\bar{\psi}\sin^q\bar{\psi}\log\frac{8L}{d}\,d\bar{\psi},$$

$$\bar{d}^2 = (\mathfrak{x}-\alpha)^2 + (\mathfrak{z}-\gamma)^2.$$

Es ist nun

$$(23)\qquad \log\frac{8L}{\bar{d}} = \log\frac{8L}{R_0} + \log\frac{R_0}{\bar{d}} = \log\frac{8L}{R_0} + \Re\left(\log\frac{R_0}{\mathfrak{x}+i\mathfrak{z}-(\alpha+i\gamma)}\right)$$

$$= \log\frac{8L}{R_0} + \frac{\bar{R}}{R_0}\cos\bar{\theta} + \frac{1}{2}\frac{\bar{R}^2}{R_0^2}\cos 2\bar{\theta} + \ldots,$$

mithin

$$\int_0^R\left(\frac{\bar{R}}{L}\right)^{p+q}\bar{R}\,d\bar{R}\int_0^{2\pi}\cos^p\bar{\psi}\sin^q\bar{\psi}\log\frac{8L}{d}\,d\bar{\psi}$$

$$= \log\frac{8L}{R}\int_0^R\left(\frac{\bar{R}}{L}\right)^{p+q}\bar{R}\,d\bar{R}\int_0^{2\pi}\cos^p\bar{\psi}\sin^q\bar{\psi}\,d\bar{\psi}$$

$$4) \quad + \lim_{R_0 \to R} \int_0^R \left(\frac{\bar{R}}{L}\right)^{p+q} \bar{R}\, d\bar{R} \int_0^{2\pi} \cos^p \bar{\psi} \sin^q \bar{\psi} \left(\frac{\bar{R}}{R_0} \cos\bar{\theta} + \frac{1}{2}\frac{\bar{R}^2}{R_0^2} \cos 2\bar{\theta} + \ldots\right) d\bar{\psi}$$

$$= \log \frac{8L}{R} b_{pq} \frac{R^2}{p+q+2} \left(\frac{R}{L}\right)^{p+q}$$

$$+ R^2 \left(\frac{R}{L}\right)^{p+q} \int_0^{2\pi} \cos^p \bar{\psi} \sin^q \bar{\psi} \left(\frac{\cos\bar{\theta}}{p+q+3} + \frac{1}{2}\frac{\cos 2\bar{\theta}}{p+q+4} + \ldots\right) d\bar{\psi},$$

$$|b_{pq}| < 2\pi.$$

Das Integral rechter Hand läßt sich leicht auswerten und liefert eine nze rationale Funktion höchstens $(p+q)$-ten Grades von $\frac{x}{L}, \frac{3}{L}$. In r Tat sind die Beiträge der Glieder mit $\cos\lambda\bar{\theta}$ $(\lambda \geqq p+q+1)$, wie an sich leicht überzeugt, wenn man

$$\cos^p \bar{\psi} = \sum_{\nu=0}^{p} x_{p\nu} \cos\nu\bar{\psi}, \ldots, \cos\lambda\bar{\theta} = \cos\lambda\psi\cos\lambda\bar{\psi} + \sin\lambda\psi\sin\lambda\bar{\psi}$$

zt, gleich Null. Der Beitrag des Gliedes mit $\cos\lambda\bar{\theta}$ $(\lambda \leqq p+q)$ ist

$$5) \quad R^2 \left(\frac{R}{L}\right)^{p+q} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{p+q+\lambda+2} \left\{ \cos\lambda\psi \int_0^{2\pi} \cos\lambda\bar{\psi} \cos^p\bar{\psi} \sin^q\bar{\psi}\, d\bar{\psi} \right.$$

$$\left. + \sin\lambda\psi \int_0^{2\pi} \sin\lambda\bar{\psi} \cos^p\bar{\psi} \sin^q\bar{\psi}\, d\bar{\psi} \right\}.$$

Bekanntlich ist

$$6) \quad \cos\lambda\psi = \sum_{\mu=0}^{\lambda} z_{\lambda\mu} \cos^{\lambda-\mu}\psi \sin^\mu\psi, \qquad \sin\lambda\psi = \sum_{\mu=1}^{\lambda} t_{\lambda\mu} \cos^{\lambda-\mu}\psi \sin^\mu\psi,$$

$$\sum |z_{\lambda\mu}| \leqq 2^\lambda, \qquad \sum |t_{\lambda\mu}| \leqq 2^\lambda.$$

Der Beitrag des Gliedes mit $\cos\lambda\bar{\theta}$ ist darum ein Polynom von $\frac{3}{R}$ von höchstens λ-tem Grade: Die Summe der absoluten Beträge ner Koeffizienten ist höchstens gleich

$$7) \quad R^2 \left(\frac{R}{L}\right)^{p+q} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{p+q+\lambda+2} \left\{ 2\pi \sum |z_{\lambda\mu}| + 2\pi \sum |t_{\lambda\mu}| \right\}$$

$$\leqq R^2 \left(\frac{R}{L}\right)^{p+q} \frac{4\pi \cdot 2^\lambda}{\lambda(p+q+\lambda+2)}.$$

Ersetzt man in dem Integral (24) rechts, das ja ein Polynom von hstens $(p+q)$-tem Grade von $\frac{x}{R}$ und $\frac{3}{R}$ ist, alle Koeffizienten durch absoluten Beträge, so wird deren Summe höchstens gleich

$$\left(\frac{R}{L}\right)^{p+q} 4\pi \sum_{\lambda=1}^{p+q} \frac{2^\lambda}{\lambda(p+q+\lambda+2)} < 4\pi R^2 \left(\frac{R}{L}\right)^{p+q} 2^{p+q} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2\pi^3}{3} R^2 \left(\frac{R}{L}\right)^{p+q} 2^{p+}$$

Nunmehr finden wir

$$\int_{\mathfrak{x}} \log\frac{8L}{d}\,\mathfrak{P}_7\,d\alpha\,d\gamma = \sum a_{mnpq}\left(\frac{\mathfrak{x}}{L}\right)^m\left(\frac{\mathfrak{z}}{L}\right)^n\left\{\log\frac{8L}{R}\,b_{pq}\frac{R^2}{p+q+2}\left(\frac{R}{L}\right)^{p+q}\right.$$

$$\left. + \mathfrak{P}_{p,q}\left(\frac{\mathfrak{x}}{R},\frac{\mathfrak{z}}{R}\right)\right\} = \log\frac{8L}{R}\,\mathfrak{Q}_1\left(\frac{\mathfrak{x}}{L},\frac{\mathfrak{z}}{L}\right) + \mathfrak{Q}_4\left(\frac{\mathfrak{x}}{L},\frac{\mathfrak{z}}{L}\right). \tag{29}$$

Wie man leicht sieht, sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_4$ Potenzreihen von $\frac{\mathfrak{x}}{L}$, $\frac{\mathfrak{z}}{L}$, die für alle

$$\left|\frac{\mathfrak{x}}{L}\right|,\ \left|\frac{\mathfrak{z}}{L}\right| < \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\underline{h},\quad \frac{R}{L} < \frac{1}{2}\,\underline{h}. \tag{30}$$

unbedingt konvergieren. Aus (17) und (29) folgt nunmehr unsere Behauptung.

Wir bestimmen jetzt die ersten Glieder der Entwicklung von $\mathfrak{W}(\mathfrak{x},\mathfrak{z})$.

Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes $(\mathfrak{x},\mathfrak{z})$ auf Σ in dem Koordinatensystem x, y, z (Fig. 2) mit $X, 0, Z$[33]). Offenbar ist

$$X = \mathfrak{x} + L,\qquad Z = \mathfrak{z}. \tag{31}$$

Nach (10) und (5) ist nach einer leichten Umrechnung

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{x},\mathfrak{z};\,\alpha,\gamma) = \log\frac{2l}{d}\left\{2 - \frac{X-l}{l} - \frac{d^2}{8l^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{X-l}{l}\right)^2 + O\left(\frac{d^3}{l^3}\right)\right\}$$

$$+ 2\log 4 + (1-\log 4)\frac{X-l}{l} + O\left(\frac{d^2}{l^2}\right), \tag{32}$$

wo diesmal

$$d^2 = (\mathfrak{x}-\alpha)^2 + (\mathfrak{z}-\gamma)^2,\qquad l = L + \alpha \tag{33}$$

ist. Es gilt darum weiter, wie man ohne Schwierigkeiten sieht,

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{x},\mathfrak{z}) = \int_{\mathfrak{x}} \mathfrak{B}(\mathfrak{x},\mathfrak{z};\,\alpha,\gamma)\,d\alpha\,d\gamma \tag{34}$$

$$= \int_{\mathfrak{x}} \log\frac{2l}{d}\left\{2 - \frac{X-l}{l} - \frac{d^2}{8l^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{X-l}{l}\right)^2\right\} d\alpha\,d\gamma$$

$$+ \int_{\mathfrak{x}} \left\{2\log 4 + (1-\log 4)\frac{X-l}{l}\right\} d\alpha\,d\gamma + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right),$$

oder wegen

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{L+\alpha} = \frac{1}{L} - \frac{\alpha}{L^2} + O\left(\frac{R^2}{L^3}\right),\qquad \frac{1}{l^2} = \frac{1}{L^2} + O\left(\frac{R^2}{L^3}\right), \tag{35}$$

$$\log\frac{2l}{d} = \log\frac{2L}{d} + \log\frac{L+\alpha}{L} = \log\frac{2L}{d} + \frac{\alpha}{L} + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)$$

---

[33]) Die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf S heißen X, Y, Z.

ach einer leichten Umordnung

$$36)\quad \mathfrak{W}(\mathfrak{X},\mathfrak{Z}) = \int_{\mathfrak{L}} \log\frac{2L}{d}\left\{2 - \frac{\mathfrak{X}-\alpha}{L} + \frac{(\mathfrak{X}-\alpha)\,\alpha}{L^2} + \frac{3}{4}\frac{(\mathfrak{X}-\alpha)^2}{L^2} - \frac{d^2}{8L^2}\right\} d\alpha\, d\gamma$$

$$+ \int_{\mathfrak{L}} \left\{2\log 4 + (1-\log 4)\frac{\mathfrak{X}-\alpha}{L} + 2\frac{\alpha}{L}\right\} d\alpha\, d\gamma + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right).$$

Es gelten nun folgende Formeln

$$37)\quad 2\int_{\mathfrak{L}} \log\frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma = 2\pi R^2 \log\frac{2L}{R}\ ^{34})$$

wie

$$38)\quad \int_{\mathfrak{L}} \frac{\alpha}{L}\log\frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma = \frac{\mathfrak{X}}{L}\frac{\pi R^2}{4},$$

$$39)\quad \int_{\mathfrak{L}} \frac{\alpha^2}{L^2}\log\frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma = \frac{\pi R^4}{4L^2}\log\frac{2L}{R} + \frac{\pi R^2}{24L^2}(\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{Z}^2),$$

$$39^*)\quad \int_{\mathfrak{L}} \frac{d^2}{8L^2}\log\frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma = -\frac{\pi R^4}{16L^2} + \frac{3\pi R^4}{16L^2}\log\frac{2L}{R}\ ^{35}).$$

---

[34]) Die Formel (37) drückt einen bekannten Satz über das logarithmische otential einer homogenen Kreisscheibe aus.

[35]) In der Tat ist (vgl. Fig. 2 und 5)

$$\int_{\mathfrak{L}} \frac{\alpha}{L}\log\frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma = \lim_{R_0 \to R} \int_{\mathfrak{L}} \frac{\alpha}{L}\log\frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma.$$

egen (23) ist nun, wie man leicht sieht,

$$\log\frac{2L}{\bar{d}}\, d\alpha\, d\gamma = \frac{1}{L}\int_0^R\int_0^{2\pi} \bar{R}\cos\bar{\psi}\log\frac{2L}{R_0}\bar{R}\, d\bar{R}\, d\bar{\psi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nL}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\bar{R}^{n+2}}{R_0^n}\cos n\bar{\theta}\cos\bar{\psi}\, d\bar{R}\, d\bar{\psi}.$$

fenbar sind wegen

$$\cos n\bar{\theta} = \cos n\bar{\psi}\cos n\psi + \sin n\bar{\psi}\sin n\psi$$

e Glieder der Summe rechts, außer für $n = 1$, gleich Null. Wir finden darum

$$\int_{\mathfrak{L}} \frac{\alpha}{L}\log\frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma = \lim_{R_0 \to R}\frac{1}{L}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\bar{R}^3}{R_0}\cos\bar{\theta}\cos\bar{\psi}\, d\bar{R}\, d\bar{\psi} = \frac{\pi}{4L}R^3\cos\psi = \frac{\pi}{4}R^2\frac{\mathfrak{X}}{L}.$$

ganz ähnlicher Weise findet man die Formel

$$\int_{\mathfrak{L}} \frac{\alpha^2}{L^2}\log\frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma = \frac{\pi R^4}{4L^2}\log\frac{2L}{R} + \frac{\pi R^2}{24L^2}(\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{Z}^2)$$

vie die ganz analoge Formel für $\int_{\mathfrak{L}} \frac{\beta^2}{L^2}\log\frac{2L}{d}\, d\alpha\, d\gamma$.

Beachtet man schließlich, daß

$$d^2 = (X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2$$

so findet man ohne Mühe die Formel (39*) des Textes.

Sie geben, in (36) eingesetzt, nach einer leichten Umformung

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = 2\pi R^2 \log\frac{8L}{R} - \frac{\mathfrak{X}}{L}\pi R^2 \log\frac{8L}{R} + \frac{5}{4}\frac{\mathfrak{X}}{L}\pi R^2 + \pi R^2 \frac{R^2}{L^2}\left(\frac{3}{4}\frac{\mathfrak{X}^2}{R^2} - \frac{1}{16}\right)\log\frac{8L}{R} + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right). \tag{40}$$

Auf der Peripherie Σ des Kreises $\mathfrak{K}$ ist $\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ eine analytische Funktion von ψ mit der Periode 2π. Gewiß kann man darum auch setzen

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(B_n \cos n\psi + A_n \sin n\psi). \tag{41}$$

Aus

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = \mathfrak{W}(\mathfrak{X}, -\mathfrak{Z}) \tag{42}$$

folgt zunächst

$$A_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{43}$$

Es ist also einfacher

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\psi. \tag{44}$$

Für den Koeffizienten B_1 finden wir wegen (40) den Ausdruck

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) \cos\psi\, d\psi = \frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi} \mathfrak{W}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})\, \mathfrak{X}\, d\psi \tag{45}$$

$$= -\pi R^2 \frac{R}{L}\left(\log\frac{8L}{R} - \frac{5}{4}\right) + \mathfrak{w}_1, \qquad \mathfrak{w}_1 = O\left(\frac{R^2}{L^2}\right).$$

Ebenso findet man

$$\begin{cases} \dfrac{B_0}{2} = \pi R^2\left(2 + \dfrac{5R^2}{16L^2}\right)\log\dfrac{8L}{R} + \mathfrak{w}_0, & \mathfrak{w}_0 = O\left(\dfrac{R^2}{L^2}\right), \\ B_2 = \dfrac{3}{8}\pi R^2 \dfrac{R^2}{L^2}\log\dfrac{8L}{R} + \mathfrak{w}_2, & \mathfrak{w}_2 = O\left(\dfrac{R^2}{L^2}\right), \\ B_n = O\left(\dfrac{R^2}{L^2}\right), & (n > 2). \end{cases} \tag{46}$$

Alle B_n sind von der Form

$$B_n = B_n' \log\frac{8L}{R} + B_n'', \tag{47}$$

unter B_n' und B_n'' Funktionen des Parameters $\frac{R}{L}$ verstanden, die für $\left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_0$ analytisch und regulär sind[36]).

[36]) Vgl. § 1 des ersten Kapitels, 2.

§ 3.

Der Integralausdruck $\int_0^1 \Delta_3\, dt$ [37].

Die kartesischen Koordinaten der Punkte P und $\bar{P}'$ auf Σ (Fig. 4)
d $\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}$; $\mathfrak{X}', \mathfrak{Z}'$, diejenigen von P_t und $\bar{P}_t'$ sind

8) $$\mathfrak{x}_t = \mathfrak{X}\left(1+\frac{\zeta}{R}t\right), \qquad \mathfrak{z}_t = \mathfrak{Z}\left(1+\frac{\zeta}{R}t\right);$$

$$\mathfrak{x}_t' = \mathfrak{X}'\left(1+\frac{\zeta'}{R}t\right), \qquad \mathfrak{z}_t' = \mathfrak{Z}'\left(1+\frac{\zeta'}{R}t\right).$$

Wir finden jetzt leicht

9) $$ds_t'^2 = d\mathfrak{x}_t'^2 + d\mathfrak{z}_t'^2 = ds'^2\left(1+\frac{t}{R}\zeta'\right)^2 + t^2 d\zeta'^2,$$

0) $$\cos\varphi_t' = \frac{\mathfrak{Z}'}{R}\frac{d\mathfrak{x}_t'}{ds_t'} - \frac{\mathfrak{X}'}{R}\frac{d\mathfrak{z}_t'}{ds_t'} = \frac{1}{R\,ds_t'}(\mathfrak{Z}'d\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}'d\mathfrak{Z}')\left(1+\frac{t\zeta'}{R}\right)$$

d wegen

1) $$\frac{d\mathfrak{X}'}{ds'} = \frac{\mathfrak{Z}'}{R}, \qquad \frac{d\mathfrak{Z}'}{ds'} = -\frac{\mathfrak{X}'}{R}$$

nfacher

2) $$\cos\varphi_t' = \frac{ds'}{ds_t'}\left(1+\frac{t\zeta'}{R}\right).$$

gilt ferner

$$\cos\vartheta_t' = \frac{\mathfrak{Z}}{R}\frac{d\mathfrak{x}_t'}{ds_t'} - \frac{\mathfrak{x}}{R}\frac{d\mathfrak{z}_t'}{ds_t'} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{X}'+\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'}{R^3}\left(1+\frac{t}{R}\zeta'\right)\frac{ds'}{ds_t'} + \frac{\mathfrak{X}'\mathfrak{Z}-\mathfrak{x}\mathfrak{Z}'}{R^2}t\frac{d\zeta'}{ds_t'}$$

naheliegender Schreibweise (Fig. 4)

$$r_t^2 = r^2 + 2\frac{t}{R}\sum(\mathfrak{X}'-\mathfrak{X})(\mathfrak{X}'\zeta'-\mathfrak{x}\zeta) + \frac{t^2}{R^2}\sum(\mathfrak{X}'\zeta'-\mathfrak{x}\zeta)^2$$
$$= r^2(1+k(t)),$$

$$\log\frac{R}{r_t} = \log\frac{R}{r} - \log\frac{r_t}{r}$$

$$\log\frac{R}{r} - \frac{1}{2}\log\left\{1+\frac{2t}{R}\sum\frac{(\mathfrak{X}'-\mathfrak{X})(\mathfrak{X}'\zeta'-\mathfrak{x}\zeta)}{r^2} + \frac{t^2}{R^2}\sum\frac{(\mathfrak{X}'\zeta'-\mathfrak{x}\zeta)^2}{r^2}\right\},$$

$$= \int_{\Sigma_t} 2\log\frac{R}{r_t}(\zeta'\cos\varphi_t' - \zeta\cos\vartheta_t')\,ds_t' = 2\int_{\Sigma}\log\frac{R}{r_t}\cdot\Pi\,ds'$$

$$= 2\int_{\Sigma}\log\frac{R}{r_t}\left[\zeta'\left(1+\frac{t}{R}\zeta'\right) - \zeta\left(\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{X}'+\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'}{R^2}\left(1+\frac{t}{R}\zeta'\right) + \frac{\mathfrak{X}'\mathfrak{Z}-\mathfrak{x}\mathfrak{Z}'}{R^2}t\frac{d\zeta'}{ds'}\right)\right]ds'$$

[37] Vgl. § 1 des ersten Kapitels, 4, 1.

Sei t^* eine Zahl > 1 und k^* ein positiver echter Bruch. Wie man sich leicht überzeugt, ist für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen reellen oder komplexen Werte von ζ, $\frac{d\zeta}{ds}$, etwa

$$|\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{ds}\right| \leqq \varepsilon_0, \tag{57}$$

und alle reellen oder komplexen t in dem Bereiche $|t| \leqq t^*$

$$|k(t)| \leqq k^*. \tag{58}$$

Der Quotient $\left|\frac{r_t}{r}\right|$ ist demnach von Null verschieden.

Der Ausdruck Δ_3' ist nach bekannten Sätzen eine in dem Bereiche $|t| \leqq t^*$ analytische und reguläre Funktion von t.

Wir setzen

$$\Delta_3' = \mathfrak{U}^{(1)} + 2t\mathfrak{U}^{(2)} + 3t^2\mathfrak{U}^{(3)} + \ldots \tag{59}$$

und erhalten

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \Delta_3' dt = \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t} 2 \log \frac{R}{r_t} (\zeta' \cos\varphi_t' - \zeta \cos\vartheta_t') ds_t' = \mathfrak{U}^{(1)} + \mathfrak{U}^{(2)} + \mathfrak{U}^{(3)} + \ldots \\ &\mathfrak{U}^{(n)} = \frac{2}{n!} \int_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\log \frac{R}{r_t} \Pi \right) \right\}_{t=0} ds'. \end{aligned}\right. \tag{60}$$

Wie man leicht sieht, ist $\mathfrak{U}^{(n)}$ ein Integralausdruck über $\zeta, \zeta', \frac{d\zeta'}{ds'}$, in dem übrigens $\frac{d\zeta'}{ds'}$ nur linear auftritt. Geht ζ in $\alpha\zeta$ über, so erhält $\mathfrak{U}^{(n)}$ den Faktor α^n.

Die vorstehenden Betrachtungen bilden ein eindimensionales Analogon zu den Betrachtungen des § 2 I meiner ersten Abhandlung über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten[38]). Dort wird der Betrachtung allerdings eine beliebige Fläche S als Integrationsgebiet zugrunde gelegt, während es sich jetzt speziell um einen Kreis handelt. Wie an jener Stelle, findet man, wenn man

$$\mathfrak{U}^{(2)} + \mathfrak{U}^{(3)} + \ldots = \Omega^{(1)}\{\zeta\} \tag{61}$$

und

$$|\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{ds}\right| \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0 \tag{61*}$$

setzt, die für das folgende wesentlichen Beziehungen

$$|\Omega^{(1)}|, \left|\frac{d\Omega^{(1)}}{ds}\right| < \alpha_1 \varepsilon^2 \text{ [39])} \qquad (\alpha_1 \text{ konstant}). \tag{62}$$

[38]) Man vergleiche loc. cit. [4]) Abh. I, S. 242–245; Abh. II, S. 140–145.
[39]) Vgl. loc. cit. [4]) Abh. I, S. 245–247.

Aus (59) folgt jetzt leicht

$$\mathfrak{U}^{(1)} = \{\Delta_3'\}_{t=0}, \qquad \mathfrak{U}^{(1)} = \int_{\Sigma} (\zeta' - \zeta \cos\vartheta')\, 2 \log \frac{R}{r}\, ds'.$$

Nun ist, wie man leicht sieht,

$$\int_{\Sigma} \cos\vartheta' \log \frac{R}{r}\, ds'$$

s unabhängig und speziell für $s = 0$ gleich

$$\int_{\Sigma} \cos\frac{s'}{R} \log \frac{R}{r}\, ds' = \pi R,$$

$$\mathfrak{U}^{(1)} = -2\pi R\zeta + 2\int_{\Sigma} \zeta' \log \frac{R}{r}\, ds'.$$

Es sei ζ eine andere nebst ihrer Ableitung stetige Funktion auf Σ, den Ungleichheiten

$$|\dot\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{ds}\right| < \varepsilon$$

ügt, und es möge

$$|\zeta - \dot\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{ds} - \frac{d\dot\zeta}{ds}\right| < \mathfrak{m}$$

n. Dann ist

$$|\Omega^{(1)}\{\zeta\} - \Omega^{(1)}\{\dot\zeta\}|, \left|\frac{d}{ds}\Omega\{\zeta\} - \frac{d}{ds}\Omega\{\dot\zeta\}\right| < \alpha_2 \varepsilon \mathfrak{m}\ ^{40}) \quad (\alpha_2 \text{ konst.}).$$

§ 4.

Der Integralausdruck $\int_0^1 \Delta_4\, dt$ [41].

Betrachten wir jetzt den Ausdruck

$$\Delta_4 = \int_{\Sigma_t} (\zeta' \cos\varphi_t' - \zeta \cos\vartheta_t') \left[\mathfrak{P}_1\left(\frac{x_t - x_t'}{l_t'}, \frac{\eta_t - \eta_t'}{l_t'}\right) \log \frac{8\, l_t'}{r_t} + \mathfrak{P}_2\left(\frac{x_t - x_t'}{l_t'}, \frac{\eta_t - \eta_t'}{l_t'}\right) + 2 \log \frac{l_t'}{L} \right] ds_t',$$

ür man mit Rücksicht auf

$$\log \frac{l_t'}{L} = \frac{x_t'}{L} - \frac{1}{2}\frac{x_t'^2}{L^2} + \cdots$$

[40]) Der Beweis wäre genau wie in dem zweidimensionalen Falle zu führen. loc. cit. [4]), Abh. I., S. 282–284.

[41]) Vgl. § 1 des ersten Kapitels, 4, 2.

auch setzen kann

$$(71)\qquad \Delta_4 = \log\frac{8L}{R}\int_{\Sigma_t}(\zeta'\cos\varphi_t' - \zeta\cos\vartheta_t')\,\mathfrak{P}'\left(\frac{\xi_t}{L},\frac{\vartheta_t}{L};\frac{\xi_t'}{L},\frac{\vartheta_t'}{L}\right)ds_t'$$

$$+\int_{\Sigma_t}(\zeta'\cos\varphi_t' - \zeta\cos\vartheta_t')\left[\mathfrak{P}'\left(\frac{\xi_t}{L},\frac{\vartheta_t}{L};\frac{\xi_t'}{L},\frac{\vartheta_t'}{L}\right)\log\frac{R}{r_t} + \mathfrak{P}''\left(\frac{\xi_t}{L},\frac{\vartheta_t}{L};\frac{\xi_t'}{L},\frac{\vartheta_t'}{L}\right)\right]ds_t'$$

$$= \log\frac{8L}{R}\int_{\Sigma}\Pi^{(1)}ds' + \int_{\Sigma}\Pi^{(1)}\log\frac{R}{r_t}ds' + \int_{\Sigma}\Pi^{(2)}ds' = \int_{\Sigma}\Pi^{*}ds' \quad [42]).$$

Für alle reellen oder komplexen Werte von ζ, $\frac{d\zeta}{ds}$ und t, die den Beziehungen

$$(72)\qquad |\zeta|,\ \left|\frac{d\zeta}{ds}\right| < \varepsilon, \qquad |t| \leqq t^* > 1$$

genügen, und alle $\frac{R}{L}$ in dem Gebiete

$$(73)\qquad \left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_1 \leqq h_0$$

können $\Pi^{(1)}$ und $\Pi^{(2)}$ als analytische und reguläre Funktionen des Parameters $\frac{R}{L}$ aufgefaßt werden. Man sieht dies leicht ein, wenn man z. B.

$$(74)\qquad \mathfrak{P}' = \sum a'_{mnpq}\left(\frac{\xi_t}{L}\right)^m\left(\frac{\vartheta_t}{L}\right)^n\left(\frac{\xi_t'}{L}\right)^p\left(\frac{\vartheta_t'}{L}\right)^q$$

$$= \sum a'_{mnpq}\left(\frac{R}{L}\right)^{m+n+p+q}\left(\frac{\xi_t}{R}\right)^m\left(\frac{\vartheta_t}{R}\right)^n\left(\frac{\xi_t'}{R}\right)^p\left(\frac{\vartheta_t'}{R}\right)^q = \sum b'_{mnpq}\left(\frac{R}{L}\right)^{m+n+p+q}$$

schreibt. Hier gilt, sofern die Ungleichheiten (72) erfüllt sind,

$$(76)\qquad \left|\frac{\xi_t}{R}\right|, \ldots, \left|\frac{\vartheta_t'}{R}\right| \leqq 1 + \varepsilon\frac{t^*}{R}.$$

Die unendliche Reihe

$$\sum |a'_{mnpq}|\,|u|^{m+n+p+q}$$

möge etwa für $|u| \leqq h_1'$ konvergieren. Wegen (74) und (76) konvergiert

$$(77)\qquad \sum |b'_{mnpq}|\left|\frac{R}{L}\right|^{m+n+p+q}$$

gewiß für

$$(78)\qquad \left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_1 \leqq h_0 \quad [43]),$$

wenn man mit h_1 die kleinere der beiden Zahlen $\frac{h_1'}{1+\frac{\varepsilon t^*}{R}}$ und h_0 bezeichnet.

---

[42]) Es ist

$$(75)\qquad \mathfrak{P}'\left(\frac{\xi_t}{L},\frac{\vartheta_t}{L};\frac{\xi_t'}{L},\frac{\vartheta_t'}{L}\right) = \mathfrak{P}_1\left(\frac{\xi_t-\xi_t'}{L},\frac{\vartheta_t-\vartheta_t'}{L}\right).$$

[43]) Die Größe h_0 ist in § 1 des ersten Kapitels, 2, eingeführt worden.

Wie bei den analogen Betrachtungen in § 3 läßt sich zeigen, daß $\Delta_1 dt$ für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werte n ζ, $\frac{d\zeta}{ds}$ und $\frac{R}{L}$, etwa

9) $$|\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{ds}\right| \leqq \varepsilon_1 \leqq \varepsilon, \qquad \left|\frac{R}{L}\right| \leqq h_1$$

eine unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe

0) $$\int_0^1 \Delta_1 dt = \mathfrak{U}_*^{(1)} + \mathfrak{U}_*^{(2)} + \ldots, \qquad \mathfrak{U}_*^{(n)} = \frac{1}{n!} \int_S \left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \Pi^*\right\}_{t=0} ds'$$

twickelt werden kann [44]).

Hier ist $\mathfrak{U}_*^{(n)}$ in bezug auf ζ, ζ', $\frac{d\zeta'}{ds'}$ vom n-ten Grade. Man sieht cht ein, daß $\mathfrak{U}_*^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ für alle den Ungleichheiten (79) ge- genden reellen oder komplexen Werte von ζ, $\frac{d\zeta}{ds}$, $\frac{R}{L}$ in der Form

$$\mathfrak{L}_1^{(n)} \log \frac{8L}{R} + \mathfrak{L}_2^{(n)}$$

rgestellt werden kann, wo $\mathfrak{L}_1^{(n)}$ und $\mathfrak{L}_2^{(n)}$ Funktionen des Parameters bezeichnen, die im Gebiete (79) analytisch und regulär sind. Auch die iden Reihen $\Sigma \mathfrak{L}_1^{(n)}$ und $\Sigma \mathfrak{L}_2^{(n)}$ konvergieren unbedingt und gleichmäßig.

Aus (71) folgt wegen

2) $$|\mathfrak{P}'|, |\mathfrak{P}''| < \alpha_1' \frac{R}{L} \qquad (\alpha_1' \text{ konstant})$$

st unmittelbar, daß für alle den Ungleichheiten (79) genügenden Werte n ζ, $\frac{d\zeta}{ds}$ und $\frac{R}{L}$

3) $$|\Omega^{(2)}\{\zeta\}| = \left|\int_0^1 \Delta_1 dt\right| < \alpha_3 \varepsilon_1 \left|\frac{R}{L} \log \frac{8L}{R}\right|$$

(vgl. § 1 des ersten Kapitels, 4, 2 Formel (37)).

Wegen

4) $$\frac{d}{ds}\mathfrak{P}'\left(\frac{\xi_t}{L}, \frac{\delta_t}{L}, \frac{\xi_t'}{L}, \frac{\delta_t'}{L}\right) = \frac{1}{L}\mathfrak{P}'_{\frac{\xi_t}{L}} \frac{d\xi_t}{ds} + \frac{1}{L}\mathfrak{P}'_{\frac{\delta_t}{L}} \frac{d\delta_t}{ds},$$

---

[44]) Das Integral Δ_1 ist für $|\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{ds}\right| \leqq \varepsilon_1$ und $|t| \leqq t^* > 1$ eine analytische und uläre Funktion von t. Wir setzen

) $$\Delta_1 = \mathfrak{U}_*^{(1)} + 2t\,\mathfrak{U}_*^{(2)} + 3t^2\,\mathfrak{U}_*^{(3)} + \ldots$$

l gewinnen durch Integration die Formel (80).

$$\frac{d\xi_t}{ds} = \frac{d\xi}{ds}\left(1 + \frac{\zeta}{R}t\right) + \xi\frac{t}{R}\frac{d\zeta}{ds}, \ldots$$

mithin

$$\left|\frac{d}{ds}\mathfrak{P}'\right| < \alpha_1'' \frac{R}{L} \qquad (\alpha_1'' \text{ konstant}) \tag{85}$$

findet man ohne wesentliche Schwierigkeiten

$$\left|\frac{d}{ds}\Omega^{(2)}\{\zeta\}\right| < \alpha_3 \varepsilon_1 \left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right| \text{ [45]}. \tag{86}$$

(Vgl. § 1 des ersten Kapitels, **4**, 2 Formel (37)).

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß

$$|\Omega^{(2)}\{\zeta\} - \Omega^{(2)}\{\dot{\zeta}\}| \quad \left|\frac{d}{ds}\Omega^{(2)}\{\zeta\} - \frac{d}{ds}\Omega^{(2)}\{\dot{\zeta}\}\right| < \alpha_4 \mathfrak{m}\left|\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right| \tag{87}$$

ist. Hierbei wird angenommen, daß $\dot{\zeta}$ den Ungleichheiten

$$|\dot{\zeta}|, \left|\frac{d\dot{\zeta}}{ds}\right| \leqq \varepsilon_1 \tag{88}$$

genügt (vgl. § 1 des ersten Kapitels, **4**, 2 Formel (39)).

Um diese Ungleichheiten zu beweisen, erscheint es am einfachsten, von der Formel (70) auszugehen und in dieser

$$\frac{8l_t'}{r_t} = \log\frac{8L}{r_t} + \log\frac{l_t'}{L} \tag{89}$$

einzusetzen. Da, wie vorhin ausgeführt, die zu integrierende Funktion für $r = 0$ wie $r^2 \log r$ verschwindet (vgl. die Fußnote [45])), so kann man bei der Bildung von $\frac{d}{ds}\Omega^{(2)}\{\zeta\} - \frac{d}{ds}\Omega^{(2)}\{\dot{\zeta}\}$ die Differentiation ohne weiteres unter dem Integralzeichen ausführen. Nach einer etwas umständlichen, aber keinerlei ernste Schwierigkeiten bietenden Rechnung, bei der u. a. die Formeln (52), (53) zu beachten sind, gewinnt man die gewünschten Beziehungen (87).

§ 5.

Der Integralausdruck $\int_0^l \Delta_2\, dt$ [46]).

Betrachten wir jetzt den Ausdruck Δ_2.

Wir schreiben (vgl. die Formel (16) des ersten Kapitels)

$$\Delta_2 = 2\zeta \sin\frac{s}{R}\int_{\Sigma_t} l_t' \sin\tau_t'\, ds_t' \int_0^{2\pi} \sin^2\frac{\chi'}{2}\,\frac{d\chi'}{\varrho_1}. \tag{90}$$

---

[45]) Man beachte, daß wegen (71) und (75) (s. Fußnote [42])) $\Pi^{(1)} \log\frac{R}{r_t}$ für $r = 0$ wie $r^2 \log\frac{R}{r}$ verschwindet, so daß in (71) unbedenklich unter dem Integralzeichen in bezug auf s differentiiert werden darf.

[46]) Vgl. § 1 des ersten Kapitels **4**, 3.

Es gilt nun, wenn man

1) $$\bar{\delta} = \delta_t - \delta_t'$$

tzt,

2) $$\int_0^{2\pi} \sin^2\frac{\chi'}{2}\,\frac{d\chi'}{\varrho_t} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\frac{\chi'}{2}\,d\chi'}{\sqrt{\bar{\delta}^2 + l_t^2 - 2 l_t l_t' \cos\chi' + l_t'^2}}$$

$$\frac{1}{2 l_t l_t'}\int_0^{\pi} \frac{4 l_t l_t' \sin^2\frac{\chi'}{2}\,d\chi'}{\sqrt{(l_t - l_t')^2 + \bar{\delta}^2 + 4 l_t l_t' \sin^2\frac{\chi'}{2}}} = \frac{1}{2 l_t l_t'}\int_0^{\pi} \sqrt{(l_t - l_t') + \bar{\delta}^2 + 4 l_t l_t' \sin^2\frac{\chi'}{2}}\,d\chi'$$

$$- \frac{(l_t - l_t')^2 + \bar{\delta}^2}{2 l_t l_t'}\int_0^{\pi} \frac{d\chi'}{\sqrt{(l_t - l_t')^2 + \bar{\delta}^2 + 4 l_t l_t' \sin^2\frac{\chi'}{2}}} = J_1 + J_2.$$

as zweite Integral rechter Hand ist uns bereits in § 1 begegnet. Der ste Summand geht aber, wie man leicht sieht, durch die Substitution $= \pi - 2\bar{\chi}$ über in

3) $$J_1 = \frac{1}{l_t l_t'}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(l_t - l_t')^2 + \bar{\delta}^2 + 4 l_t l_t' \cos^2\bar{\chi}}\,d\bar{\chi}$$

$$= \frac{\sqrt{(l_t + l_t')^2 + \bar{\delta}^2}}{l_t l_t'}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{4 l_t l_t' \sin^2}{(l_t + l_t')^2 + \bar{\delta}^2}}\,d\bar{\chi}.$$

etzt man hier

4) $$k_*^2 = \frac{4 l_t l_t'}{(l_t + l_t')^2 + \bar{\delta}^2} = \frac{4 l_t l_t'}{r_t^2 + 4 l_t l_t'}, \qquad k_*'^2 = 1 - k_*^2,$$

findet m^{a}n

5) $$J_1 = \frac{\sqrt{(l_t + l_t')^2 + \bar{\delta}^2}}{l_t l_t'}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k_*^2 \sin^2\bar{\chi}}\,d\bar{\chi}$$

$$= \frac{\sqrt{(l_t + l_t')^2 + \bar{\delta}^2}}{l_t l_t'}\left[\left(\frac{1}{2}k_*'^2 + \frac{3}{16}k_*'^4 + \ldots\right)\log\frac{4}{k_*'} + 1 - \frac{1}{4}k_*'^2 - \frac{13}{64}k_*'^4 - \ldots\right]^{47}).$$

Es ist nun weiter (vgl. Fig. 4)

6) $$k_*'^2 = \frac{(l_t - l_t')^2 + \bar{\delta}^2}{(l_t + l_t')^2 + \bar{\delta}^2} = \frac{r_t^2}{r_t^2 + 4 l_t l_t'} = \frac{r_t^2}{4 l_t l_t'}\,\frac{1}{1 + \frac{r_t^2}{4 l_t l_t'}}$$

$$= p_*(1 - p_* + p_*^2 - \ldots), \qquad \left(p_* = \frac{r_t^2}{4 l_t l_t'}\right).$$

[47]) Vgl. z. B. F. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, 2, Paris 1891, S. 141.

$$(97)\quad \log\frac{4}{k_*'} = \log 4 - \frac{1}{2}\log k_*'^2 = \log 4 - \frac{1}{2}\log p_* + \frac{1}{2}\log(1+p_*)$$
$$= \log 4 - \frac{1}{2}\log\frac{r_i^2}{4\,l_i l_i'} + \frac{1}{2}\left(p_* - \frac{1}{2}p_*^2 + \frac{1}{3}p_*^3 - \ldots\right),$$

$$(98)\quad \frac{\sqrt{(l_i+l_i')^2+\bar{\delta}^2}}{\sqrt{l_i l_i'}} = \frac{1}{\sqrt{l_i l_i'}}\sqrt{r_i^2+4\,l_i l_i'} = \frac{2}{\sqrt{l_i l_i'}}\sqrt{1+p_*}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{l_i l_i'}}\left(1+\frac{1}{2}p_* - \frac{1}{8}p_*^2 + \ldots\right).$$

Aus (95) bis (98) ergibt sich jetzt

$$(99)\quad J_1 = \frac{2}{\sqrt{l_i l_i'}}\left(1+\frac{1}{2}p_* - \frac{1}{8}p_*^2 + \ldots\right)\Big[\Big(\log 4 - \frac{1}{2}\log p_* + \frac{p_*}{2}$$
$$-\frac{p_*^2}{4}+\frac{p_*^3}{6}-\ldots\Big)\Big\{\frac{1}{2}(p_* - p_*^2 + p_*^3 - \ldots) + \frac{3}{16}(p_* - p_*^2 + p_*^3 - \ldots)^2 + \ldots\Big\}$$
$$+1 - \frac{1}{4}(p_* - p_*^2 + p_*^3 - \ldots) - \frac{13}{64}(p_* - p_*^2 + p_*^3 - \ldots)^2 - \ldots\Big].$$

Des weiteren findet man ohne Schwierigkeiten

$$(100)\quad J_2 = -2p_*\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\,d\chi}{\sqrt{r_i^2+4\,l_i l_i'\cos^2\chi}} = -\frac{4p_*}{\sqrt{r_i^2+4\,l_i l_i'}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\chi}{\sqrt{1-\frac{4\,l_i l_i'}{r_i^2+4\,l_i l_i'}\sin^2\chi}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{l_i l_i'}}\frac{2p_*}{\sqrt{1+p_*}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{\sqrt{1-k_*^2\sin^2\chi}} = -\frac{2}{\sqrt{l_i l_i'}}\left(p_* - \frac{1}{2}p_*^2 + \frac{3}{8}p_*^3 - \ldots\right)$$
$$\left\{\left(1+\frac{1}{4}k_*'^2 + \frac{9}{64}k_*'^4 + \ldots\right)\log\frac{4}{k_*'} - \frac{1}{4}k_*'^2 - \frac{21}{128}k_*'^4 - \ldots\right\},$$

demnach wegen (96) bis (98)

$$(101)\quad J_2 = -\frac{2}{\sqrt{l_i l_i'}}\left(p_* - \frac{1}{2}p_*^2 + \frac{3}{8}p_*^3 - \ldots\right)\Big[\Big(\log 4 - \frac{1}{2}\log p_* + \frac{p_*}{2}$$
$$-\frac{p_*^2}{4}+\frac{p_*^3}{6}-\ldots\Big)\Big\{1+\frac{1}{4}(p_* - p_*^2 + p_*^3 - \ldots) + \frac{9}{64}(p_* - p_*^2 + p_*^3 - \ldots)^2 + \ldots\Big\}$$
$$-\frac{1}{4}(p_* - p_*^2 + p_*^3 - \ldots) - \frac{21}{128}(p_* - p_*^2 + p_*^3 - \ldots)^2 - \ldots\Big].$$

Beachtet man, daß

$$(102)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{l_i} = \dfrac{1}{L+x_i} = \dfrac{1}{L}\left(1 - \dfrac{x_i}{L} + \ldots\right), \qquad \dfrac{1}{l_i'} = \dfrac{1}{L}\left(1 - \dfrac{x_i'}{L} + \ldots\right), \\ \dfrac{1}{\sqrt{l_i l_i'}} = \dfrac{1}{L}\left(1+\dfrac{x_i}{L}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{x_i'}{L}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{L}\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{x_i}{L} + \ldots\right)\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{x_i'}{L} + \ldots\right. \end{cases}$$

lt, so findet man aus (92), (99), (101) und (96) unmittelbar, daß

$$\sin^2\frac{\chi'}{2}\frac{d\chi'}{\varrho_t}=\frac{1}{L}\frac{r_t^2}{L^2}\left[\mathfrak{P}_*^{(1)}\left(\frac{\xi_t}{L},\frac{\delta_t}{L},\frac{\xi_t'}{L},\frac{\delta_t'}{L}\right)\log\frac{8L}{r_t}+\mathfrak{P}_*^{(2)}\left(\frac{\xi_t}{L},\frac{\delta_t}{L},\frac{\xi_t'}{L},\frac{\delta_t'}{L}\right)\right]+\frac{2}{\sqrt{l_t l_t'}}$$

setzt werden kann, unter $\mathfrak{P}_*^{(1)}$ und $\mathfrak{P}_*^{(2)}$ Potenzreihen verstanden, die für le dem absoluten Betrage hinreichend kleinen Werte ihrer Argumente, etwa

$$\left|\frac{\xi_t}{L}\right|,\ldots,\left|\frac{\delta_t'}{L}\right|\leqq h_2\leqq h_1 \tag{04}$$

nvergieren.

Es gilt nun, wie man leicht sieht,

$$\frac{4}{\sqrt{l_t l_t'}}\zeta\sin\frac{s}{R}\int_{\underset{\sim}{s}_t}l_t'\sin\tau_t'\,ds_t'=\frac{4}{\sqrt{l_t l_t'}}\zeta\sin\frac{s}{R}\int_{\underset{\sim}{s}_t}(L+\xi_t')\sin\tau_t'\,ds_t'$$

$$=\frac{4}{\sqrt{l_t l_t'}}\zeta\sin\frac{s}{R}\int_{\underset{\sim}{s}_t}\xi_t'\sin\tau_t'\,ds_t',$$

$$\int_{\underset{\sim}{s}_t}\sin\tau_t'\,ds_t'=0$$

Wie in § 3 überzeugt man sich jetzt, daß der Ausdruck

$$\Omega^{(3)}\{\zeta\}=\int_0^1\Delta_2\,dt=2\zeta\sin\frac{s}{R}\int_0^1 dt\int_{\underset{\sim}{s}_t}l_t'\sin\tau_t'\,ds_t'\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{\chi'}{2}\frac{d\chi'}{\varrho_t} \tag{05}$$

eine Reihe von der Form

$${}_*\mathfrak{U}^{(1)}+{}_*\mathfrak{U}^{(2)}+{}_*\mathfrak{U}^{(3)}+\ldots \tag{06}$$

twickelt werden kann. In (106) bezeichnet $\mathfrak{U}^{(n)}$ einen Integralausdruck ten Grades in bezug auf ζ, ζ', $\frac{d\zeta'}{ds'}$. Die unendliche Reihe (106) kon-rgiert unbedingt und gleichmäßig für alle reellen und komplexen Werte n ζ, die den Beziehungen

$$|\zeta|,\ \left|\frac{d\zeta}{ds}\right|\leqq\varepsilon_2\leqq\varepsilon_1\leqq\varepsilon \tag{07}$$

nügen und alle Werte des Parameters $\frac{R}{L}$ in dem Gebiete

$$\left|\frac{R}{L}\right|\leqq h_2\leqq h_1. \tag{08}$$

Man kann

$$(109) \qquad {}_*\mathfrak{U}^{(n)} = \mathfrak{D}_1^{(n)} \log \frac{8L}{R} + \mathfrak{D}_2^{(n)}$$

setzen, unter $\mathfrak{D}_1^{(n)}$ und $\mathfrak{D}_2^{(n)}$ gewisse Funktionen des Parameters $\frac{R}{L}$ verstanden, die in (107) analytisch und regulär sind. Auch die beiden unendlichen Reihen $\Sigma \mathfrak{D}_1^{(n)}$ und $\Sigma \mathfrak{D}_2^{(n)}$ konvergieren unbedingt und gleichmäßig.

Es macht nunmehr keine Schwierigkeiten, die Ungleichheiten, die in § 1 des ersten Kapitels 4, 3 (Formeln (44) und (46)) angegeben sind, abzuleiten. Das Verfahren ist dem in § 4 skizzierten völlig analog.

Münster i. W., den 2. Juni 1921.

(Eingegangen am 2. Juni 1921.)

eue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen.

A. Das Feld in der Umgebung eines langsam rotierenden ugelähnlichen Körpers von beliebiger Masse in 1. und 2. Annäherung.

Von

Rudolf Bach in Essen-Hügel.

I. Einleitung.

Von astronomischen Gesichtspunkten ausgehend, haben bereits 1918 Lense und H. Thirring[1]) für den Fall *unendlich kleiner* Masse und *ngsamer* Rotation das Feld eines Zentralkörpers in 1. Annäherung bemmt und den Einfluß der Rotation auf die Planetenbewegung untercht. Sie bedienten sich bei der Ableitung der von Einstein[2]) entickelten Gravitationswellenmethode. Im folgenden soll die Masse des ntralkörpers beliebig bleiben, dagegen müssen wir uns in bezug auf e Rotationsgeschwindigkeit Beschränkung auf die Glieder 1. und 2. Ordng auferlegen.

Wir gehen aus von der von Schwarzschild[3]) gegebenen Lösung r die Umgebung einer ruhenden Kugel, die wir unter Einführung der lichen rein imaginären Koordinate $u = ict$ so schreiben:

$$) \qquad ds^2 = \frac{r-2m}{r} du^2 + \frac{r}{r-2m} dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2\varphi d\vartheta^2.$$

II. Formulierung des Problems.

Zwecks Feststellung der allgemeinen Form des Linienelements beachten r zunächst, daß alle Koeffizienten desselben sowohl von der Zeit $x^{(1)}$ abhängig sein müssen, da die Bewegung stationär sein soll, als auch

[1]) J. Lense und H. Thirring, Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralrper usw., Phys. Zeitschr. (1918), S. 156–165.

[2]) Sitzungsberichte der Preuß. Ak. d. Wiss. (1918), S. 154–167.

[3]) Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der nsteinschen Theorie. Sitzungsber. der Preuß. Ak. d. Wiss. (1916[1]), S. 189–196.

von dem Azimut $x^{(2)}$ der Meridianebene, da die axiale Symmetrie durch die Rotation offenbar nicht gestört wird. Ferner steht fest, daß das *räumliche* Linienelement eines beliebigen nichteuklidischen R_3 auf die orthogonale Form gebracht werden kann, ebenso wie wir dies z. B. an dem Ausdruck (1) sehen. Da wir nur eine erste und zweite Näherung berechnen wollen, wird sich das Linienelement nur um kleine Glieder von (1) unterscheiden und deshalb auch die Koordinaten, die den räumlichen Bestandteil davon orthogonal machen, nur wenig von den für das statische Feld benutzten. Wir bezeichnen sie direkt wieder mit $x^{(2)} = \vartheta$, $x^{(3)} = r$, $x^{(4)} = \varphi$.

Es handelt sich nun noch um die Größen g_{12}, g_{13}, g_{14}. Da wir ausdrücklich eine Rotation, also eine Bewegung in der $x^{(2)}$-Richtung, annehmen, dürfen wir g_{12} nicht gleich Null setzen, es wird vielmehr als eine unendlich kleine Größe erster Ordnung eingeführt werden müssen. Dagegen zeigt der Erfolg, daß g_{13} und $g_{14} = 0$ vorausgesetzt werden dürfen. Wir setzen nun an:

$$(2) \qquad ds^2 = \alpha du^2 + 2\omega du d\vartheta + \beta d\vartheta^2 + \gamma dr^2 + \delta d\varphi^2,$$

wo die Funktionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega$ nur von r und φ abhängen. ω ist eine z. Z. rein imaginäre Größe, die bei konstantem r und φ der nicht näher definierten Rotationsgeschwindigkeit proportional ist. Die Ableitungen der unbekannten Funktionen nach $x^{(3)} = r$ und $x^{(4)} = \varphi$ bezeichnen wir mit angehängten unteren Indizes 3 bzw. 4, da eine Verwechslung mit den kovarianten Indizes der Tensoren nicht zu befürchten ist. Ferner setzen wir

$$(3) \qquad \alpha\beta - \omega^2 \equiv \Delta.$$

Wir haben dann zunächst für den Fundamentaltensor folgende Schemata:

$$(4) \qquad g_{ik} = \begin{vmatrix} \alpha & \omega & 0 & 0 \\ \omega & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{vmatrix}; \qquad g^{ik} = \begin{vmatrix} \beta/\Delta & -\omega/\Delta & 0 & 0 \\ -\omega/\Delta & \alpha/\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\delta \end{vmatrix}.$$

Ferner für den Pseudotensor

$$(5) \qquad \Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}\right):$$

$$(6a) \quad 2\cdot\Gamma_{1,ik} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 0 & 0 & -\omega_3 & -\omega_4 \\ -\alpha_3 & -\omega_3 & 0 & 0 \\ -\alpha_4 & -\omega_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \qquad (6b) \quad 2\cdot\Gamma_{2,ik} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\omega_3 & -\omega_4 \\ 0 & 0 & -\beta_3 & -\beta_4 \\ -\omega_3 & -\beta_3 & 0 & 0 \\ -\omega_4 & -\beta_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{3,ik} = \begin{vmatrix} \alpha_3 & \omega_3 & 0 & 0 \\ \omega_3 & \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_3 & -\gamma_4 \\ 0 & 0 & -\gamma_4 & +\delta_3 \end{vmatrix}; \qquad (6\mathrm{d}) \quad 2\cdot\Gamma_{4,ik} = \begin{vmatrix} \alpha_4 & \omega_4 & 0 & 0 \\ \omega_4 & \beta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\gamma_4 & -\delta_3 \\ 0 & 0 & -\delta_3 & -\delta_4 \end{vmatrix}$$

diesen Größen berechnet man die 21 Krümmungskomponenten nach Formel

$$R_{pq,ik} = \frac{\partial \Gamma_{p,qi}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{p,qk}}{\partial x^i} + g^{\alpha\beta}(\Gamma_{\alpha,pk}\Gamma_{\beta,qi} - \Gamma_{\alpha,pi}\Gamma_{\beta,qk}).$$

Man erhält

$$4R_{12,12} = \frac{\omega_3^2 - \alpha_3\beta_3}{\gamma} + \frac{\omega_4^2 - \alpha_4\beta_4}{\delta}.$$

$$4R_{13,13} = -2\alpha_{33} + \frac{\beta\alpha_3^2 - 2\omega\alpha_3\omega_3 + \alpha\omega_3^2}{\Delta} + \frac{\delta\alpha_3\gamma_3 - \gamma\alpha_4\gamma_4}{\gamma\delta}.$$

$R_{14,14}$ ergibt sich aus $R_{13,13}$ durch gleichzeitige Vertauschung von mit 4 und γ mit δ. $R_{23,23}$ und $R_{24,24}$ ergeben sich aus diesen zwei nponenten durch Vertauschung von α mit β.

$$4R_{34,34} = -2\gamma_{44} - 2\delta_{33} + \frac{\gamma_4^2 + \gamma_3\delta_3}{\gamma} + \frac{\delta_3^2 + \gamma_4\delta_4}{\delta}.$$

$$R_{14,23} = -2\omega_{34} + \frac{\alpha\beta_4\omega_3 - \omega(\alpha_3\beta_4 + \omega_3\omega_4) + \beta\alpha_3\omega_4}{\Delta} + \frac{\delta\omega_3\gamma_4 + \gamma\omega_4\delta_3}{\gamma\delta}.$$

$R_{13,42}$ ergibt sich hieraus durch die Vertauschungen (3, 4) und (γ, δ) nachfolgende Umkehrung des Vorzeichens. $R_{12,34}$ ergibt sich daraus, es mit diesen letzten beiden Komponenten zusammen Null aushen muß.

$$4R_{13,14} = -2\alpha_{34} + \frac{\alpha\omega_3\omega_4 - \omega(\alpha_4\omega_3 + \alpha_3\omega_4) + \beta\alpha_3\alpha_4}{\Delta} + \frac{\delta\alpha_3\gamma_4 + \gamma\alpha_4\delta_3}{\gamma\delta}.$$

Hieraus $R_{23,24}$ durch die Vertauschung (α, β).

$$4R_{31,32} = -2\omega_{33} + \frac{\alpha\beta_3\omega_3 - \omega(\alpha_3\beta_3 + \omega_3^2) + \beta\alpha_3\omega_3}{\Delta} + \frac{\delta\gamma_3\omega_3 - \gamma\gamma_4\omega_4}{\gamma\delta}.$$

Hieraus $R_{41,42}$ durch die Vertauschungen (3, 4) und (γ, δ).
Die acht übrigen $R_{pq,ik}$ sind Null.
Aus den $R_{pq,ik}$ bildet man nun endlich durch Benutzung der Formel

$$R_{ix} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha i,\varkappa\beta}$$

Komponenten des Einsteinschen Tensors. Man erhält:

$$4R_{11} = \frac{2\alpha_{33}}{\gamma} + \frac{2\alpha_{44}}{\delta} + \frac{-\beta\alpha_3^2 + \alpha\alpha_3\beta_3 + 2\omega\alpha_3\omega_3 - 2\alpha\omega_3^2}{\Delta\gamma}$$
$$+ \frac{-\beta\alpha_4^2 + \alpha\alpha_4\beta_4 + 2\omega\alpha_4\omega_4 - 2\alpha\omega_4^2}{\Delta\delta} + \frac{-\gamma^2\alpha_4\delta_4 + \gamma\delta(\alpha_3\delta_3 + \alpha_4\gamma_4) - \delta^2\alpha_3\gamma_3}{\gamma^2\delta^2}.$$

Hieraus R_{22} durch die Vertauschung (α, β).

$$(16)\quad 4R_{33} = \frac{2\gamma_{44}}{\delta} + \frac{2\delta_{33}}{\delta} + \frac{2\beta\alpha_{33} - 4\omega\omega_{33} + 2\alpha\beta_{33}}{\Delta} - \frac{\gamma_3\delta_3 + \gamma_4^2}{\gamma\delta} - \frac{\gamma_4\delta_4 + \delta_3^2}{\delta^2}$$
$$+ \frac{-\alpha\beta_3\gamma_3 + 2\omega\gamma_3\omega_3 - \beta\alpha_3\gamma_3}{\Delta\gamma} + \frac{\alpha\beta_4\gamma_4 - 2\omega\gamma_4\omega_4 + \beta\alpha_4\gamma_4}{\Delta\delta}$$
$$+ \frac{1}{\Delta^2}\cdot[-\alpha^2\beta_3^2 - 2\alpha\beta\omega_3^2 - \beta^2\alpha_3^2 + 4\alpha\omega\beta_3\omega_3 + 4\beta\omega\alpha_3\omega_3 - 2\omega^2(\alpha_3\beta_3 + \omega_3^2)].$$

Hieraus R_{44} durch die Vertauschungen $(3, 4)$ und (γ, δ).

$$(17)\quad 4R_{12} = \frac{2\omega_{33}}{\gamma} + \frac{2\omega_{44}}{\delta} + \frac{-\alpha\beta_3\omega_3 + 2\omega\alpha_3\beta_3 - \beta\alpha_3\omega_3}{\Delta\gamma}$$
$$+ \frac{-\alpha\beta_4\omega_4 + 2\omega\alpha_4\beta_4 - \beta\alpha_4\omega_4}{\Delta\delta} + \frac{-\gamma^2\delta_4\omega_4 + \gamma\delta(\delta_3\omega_3 + \gamma_4\omega_4) - \delta^2\gamma_3\omega_3}{\gamma^2\delta^2}.$$

$$(18)\quad 4R_{34} = \frac{2\beta\alpha_{34} + 2\alpha\beta_{34} - 4\omega\omega_{34}}{\Delta} + \frac{-\alpha\beta_3\gamma_4 - \beta\alpha_3\gamma_4 + 2\omega\omega_3\gamma_4}{\Delta\gamma}$$
$$+ \frac{-\alpha\beta_4\gamma_3 - \beta\alpha_4\delta_3 + 2\omega\omega_4\delta_3}{\Delta\delta} + \frac{1}{\Delta^2}[-\alpha^2\beta_3\beta_4 - \beta^2\alpha_3\alpha_4 - 2\alpha\beta\omega_3\omega_4$$
$$+ 2\alpha\omega(\beta_4\omega_3 + \beta_3\omega_4) + 2\beta\omega(\alpha_3\omega_4 + \alpha_4\omega_3) - \omega^2(\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 + 2\omega_3\omega_4)].$$

Die vier übrigen R_{ik} sind Null.

In den Ausdrücken ist die Kleinheit der Größe ω noch nicht berücksichtigt. Zunächst stellen wir nochmals die für $\omega = 0$ geltenden statischen Werte der Unbekannten zusammen:

$$(19)\quad \omega_0 = 0, \quad \alpha_0 = \frac{r - 2m}{r}, \quad \beta_0 = r^2\sin^2\varphi, \quad \gamma_0 = \frac{r}{r - 2m}, \quad \delta_0 = r^2.$$

Diese Ausdrücke betrachten wir als *nullte* Annäherung. Die *prinzipielle* Hauptschwierigkeit besteht darin, über diese hinaus zu einer *ersten* Näherung zu kommen, was im folgenden Abschnitt erledigt wird. Die Aufstellung der *zweiten* Näherung bietet, wenn der allgemeine Gesichtspunkt erst gefunden ist, nur *rechnerische* Schwierigkeiten.

III. Erste Näherungswerte der Integrale.

Bei Betrachtung der Differentialgleichungen zeigt sich folgendes als der Punkt, an dem die Integration ansetzen kann: Bei der Potenzentwicklung der Größen R_{ik} nach Potenzen der unendlich kleinen Größen erster Ordnung ω, ω_3, ω_4 usw. ist jedes folgende Glied um zwei Größenordnungen kleiner als das vorhergehende, und zwar kommen in R_{12} nur die Größen ungerader Ordnung vor, in den übrigen Komponenten nur die von gerader Ordnung. Eine erste Annäherung erhält man also, wenn man die Glieder zweiter und höherer Ordnung streicht, in höchst einfacher Weise. Zunächst ist:

$$(20)\qquad \alpha_1 = \alpha_0, \quad \beta_1 = \beta_0, \quad \gamma_1 = \gamma_0, \quad \delta_1 = \delta_0,$$

n noch für ω aus $R_{12} = 0$ eine lineare Differentialgleichung folgt, die Einsetzen der Werte (20), (19) lautet:

$$\frac{r-2m}{r}\cdot\omega_{33}+\frac{1}{r^2}\cdot\omega_{44}-\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r^2}\cdot\omega_4+\frac{4m}{r^3}\cdot\omega=0.$$

Diese Gleichung hat leicht auffindbare Integrale von der Form $\cdot g(\varphi)$, da aber unser rotierender Körper als möglichst einfaches, kugelliches Gebilde, nicht z. B. als Dipol oder noch komplizierter gedacht kommt für uns nur die Lösung in Betracht, die in bezug auf die ozentrische Poldistanz φ die denkbar einfachste Abhängigkeit zeigt und $\varphi = 0$ verschwindet. Wir geben diese Lösung, da sie überraschend ach ist, ausnahmsweise in einer Form, die nicht nur für den Außen-n, sondern allgemeiner für den leeren Raum zwischen zwei einander chließenden Massenschalen gilt:

$$\omega=\left(\frac{\varepsilon}{r}+\varepsilon^* r^2\right)\sin^2\varphi. \quad (\varepsilon, \varepsilon^* \text{ unendlich kleine Konstanten.})$$

Für die weitere Bearbeitung setzen wir aber sofort wieder $\varepsilon^* = 0$. *n wird also in großer Entfernung die Wirkung der Rotation unich klein*, ein erstes, durchaus befriedigendes Resultat. Wir haben als *erste Näherung* gefunden:

$$ds^2=\frac{r-2m}{r}du^2+\frac{2\varepsilon\sin^2\varphi}{r}du\,d\vartheta+\frac{r}{r-2m}dr^2+r^2d\varphi^2+r^2\sin^2\varphi d\vartheta^2.$$

Den Wert der Konstanten ε bestimmen wir durch Vergleich mit dem Lense und Thirring (l. c.) gefundenen Resultat. Formt man das ige Linienelement auf Polarkoordinaten um, so kommt:

$$ds^2=\frac{r-2kM}{r}du^2+\frac{8ikMl^2\omega\sin^2\varphi}{5r}du\,d\vartheta + \frac{r+2kM}{r}(dr^2+r^2d\varphi^2+r^2\sin^2\varphi d\vartheta^2).$$

In dieser Formel ist k die Einsteinsche Gravitationskonstante, die Masse, l der Radius und ω die Rotationsgeschwindigkeit des ralkörpers.

Durch die Substitution $r = r' - kM$ läßt sich volle Übereinstimmung (23) erzielen und der Vergleich gibt

$$\varepsilon=\frac{4}{5}ikMl^2\omega,$$

mit Einführung des Trägheitsmoments der Kugel

$$\varepsilon = 2ik\Theta\omega.$$

Es wäre leicht, auf Grund dieser Lösung die Beeinflussung der etenbahnen durch die Rotation der Sonne zu berechnen. Wir wollen

aber auf diesen Gegenstand nicht abschweifen und uns auf eine anscha liche Deutung des Einflusses von ε auf das Linienelement beschränk Wir deuten zu diesem Behufe ϑ, r, φ als Polarkoordinaten eines Euk dischen Bildraums und t als die zugehörige Zeit einer Lorentzsch Welt. Als Bewegungstransformationen in dieser Welt sind solche ana sehen, die den Ausdruck

$$(26) \qquad d\sigma^2 = dt^2 - r^2 \sin^2\varphi\, d\vartheta^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

ungeändert lassen. Homogene lineare Transformationen dieser Art *Koordinatendifferentiale allein* sind *lokale* Bewegungstransformatione die im allgemeinen nicht integrabel sind. Wir suchen nun durch ei solche Lokaltransformation das Glied mit ε in (23) herauszuschaffe Hierzu genügt eine Transformation in dt und $d\vartheta$ allein. Man sieht sofo ein, daß dieselbe die Form haben muß:

$$(27) \qquad \begin{cases} dt = \mathfrak{Cof}\,\alpha \cdot dt' + r \sin\varphi \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha\, d\vartheta', \\ d\vartheta = \dfrac{1}{r\sin\varphi} \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha\, dt' + \mathfrak{Cof}\,\alpha \cdot d\vartheta', \end{cases}$$

wo α eine Lokalkonstante ist. Da das wegzuschaffende Glied unendli klein ist, kann man $\mathfrak{Cof}\,\alpha$ durch 1 und $\mathfrak{Sin}\,\alpha$ durch α ersetzen und find leicht, daß (23) in die orthogonale Form (1) übergeht durch die Lok bewegung

$$(28) \qquad \begin{cases} dt = dt' + \dfrac{\varepsilon \sin^2\varphi}{2m} d\vartheta', \\ d\vartheta = d\vartheta' + \dfrac{\varepsilon}{2mr^2} dt'. \end{cases}$$

(Die erste Formel ist nur integrabel, wenn man sich auf eine Kegel $\varphi = \text{konst.}$ hält, die zweite nur auf einer Kugel $r = \text{konst.}$, d ganze System also nur auf einem Parallelkreise.) *Die anschauliche Deutu des Ausdrucks* (25) *besteht also darin, daß auf einem Parallelkreise* (r, *die Wirkung der Rotation des Zentralkörpers gleichkommt einer Rotati des Parallelkreises* (*des Äthers könnte man sagen*), *mit der nach auß hin stark abnehmenden, wegen* (25) *von m unabhängigen Winkg geschwindigkeit* $\frac{\varepsilon}{2mr^2} = \frac{2l^2\omega}{5r^2}$. Es sei nochmals betont, daß man dies Ausdruck nicht etwa nach r differentiieren darf, um aus dem so bestimmt „*Ätherwind*“ einen „*Ätherwirbel*“ abzuleiten. Für solche Betrachtung kommt man mit linearen Transformationen wie (28) nicht aus. Mer würdig ist, wenn man von „Ätherwind“ reden will, der „Mitführung koeffizient“ $\frac{2}{5}$ an der Oberfläche.

Es sei nur noch betont, daß der „Ätherwind“ nur auf *beweg*

Massenpunkte Kraftwirkungen ausübt, wie sich aus der Gleichung der geodätischen Linie leicht ergibt.

Für feinere Betrachtungen, insbesondere das Studium der durch den „Ätherwind" hervorgerufenen Kompressionen, Kräfte und Drücke ist aber eine Berechnung der zweiten Näherung unerläßlich, der wir uns jetzt zuwenden.

IV. Zweite Näherungswerte der Integrale.

A. Sechs inhomogene lineare partielle Differentialgleichungen.

Die Abweichungen der zweiten Näherungswerte von den ersten sind nach der Bemerkung am Anfang des Abschnitts III um zwei Größenordnungen kleiner als die ersten Näherungswerte. Wir setzen deshalb in die Gleichungen $R_{ik} = 0$ des Abschnitts II ein:

$$(29)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{r-2m}{r} + \varepsilon^2 \cdot a; \qquad \beta = r^2 \sin^2\varphi + \varepsilon^2 \cdot b; \qquad \gamma = \dfrac{r}{r-2m} + \varepsilon^2 \cdot c; \\ \delta = r^2 + \varepsilon^2 \cdot d; \qquad \omega = \dfrac{\varepsilon \sin^2\varphi}{r} + \varepsilon^3 \cdot e. \end{cases}$$

Die Rechnung ist nun ziemlich langwierig, hat aber das Angenehme, daß sich nach ihrer Ausführung eine (durch den Impulssatz bedingte) Kontrolle bietet. Wir werden für die vier Unbekannten a, b, c, d fünf Gleichungen erhalten, die sich nicht nur auf vier, sondern auf drei reduzieren müssen, da in der Meridianebene eine Transformation von folgender Form willkürlich bleiben muß, die die erste Näherung ungeändert läßt:

$$(30)\qquad r = r_1 + \varepsilon^2 r_1 (r_1 - 2m) \frac{\partial \psi}{\partial r_1}, \qquad \varphi = \varphi_1 - \varepsilon^2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1},$$

wo ψ eine ganz beliebige Funktion von r_1 und φ_1 ist. Bei dieser Transformation gehen die Größen a, b, c, d, e in folgende über:

$$(31)\quad \begin{cases} a_1 = a + \dfrac{2m(r_1-2m)}{r_1} \dfrac{\partial \psi}{\partial r_1}; \\ b_1 = b + 2r_1^2 \cdot (r_1 - 2m) \sin^2\varphi_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial r_1} - 2r_1^2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}; \\ c_1 = c + \dfrac{2r_1(2r_1-3m)}{r_1-2m} \dfrac{\partial \psi}{\partial r_1} + 2r_1^2 \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial r_1^2}; \; d_1 = d + 2r_1^2(r_1-2m)\dfrac{\partial \psi}{\partial r_1} - 2r_1^2 \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi_1^2}; \\ e_1 = e - \dfrac{2\sin\varphi_1 \cos\varphi_1}{r_1} \dfrac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} - \dfrac{(r_1-2m)\sin^2\varphi_1}{r_1} \dfrac{\partial \psi}{\partial r_1}. \end{cases}$$

Mit Einsetzung der Werte (29) nehmen nun die Krümmungskomponenten R_{ik} (Formeln (15) bis (18)) nach Division durch ε^2 bzw. ε^3 folgende Werte an:

$$(32)\quad \frac{R_{11}}{\varepsilon^2} = \frac{r-2m}{2r}a_{33} + \frac{1}{2r^2}a_{44} + \frac{2r-5m}{2r^2}a_3 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r^2}a_4 + \frac{m^2}{r^3(r-2m)}$$
$$+ \frac{m(r-2m)}{2r^5\sin^2\varphi}b_3 - \frac{m(r-2m)}{r^6\sin^2\varphi}b - \frac{m(r-2m)^2}{2r^4}c_3 - \frac{m^2(r-2m)}{r^5}c$$
$$+ \frac{m(r-2m)}{2r^5}d_3 - \frac{m(r-2m)}{r^6}d - \frac{(r-2m)\sin^2\varphi}{2r^7} - \frac{2\cos^2\varphi}{r^6} - \frac{m^2\sin^2}{r^7(r-2}$$

$$(33)\quad \frac{R_{22}}{\varepsilon^2} = \frac{r\sin^2\varphi}{2}a_3 + \frac{r\sin\varphi\cos\varphi}{2(r-2m)}a_4 - \frac{m\sin^2\varphi}{r-2m}a + \frac{r-2m}{2r}b_{33} + \frac{1}{2r^2}b_{44}$$
$$- \frac{r-4m}{2r^2}b_3 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r^2}b_4 + \left[\frac{r-2m}{r^3} + \frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{r^2}\right]b - \frac{(r-2m)^2\sin^2\varphi}{2r}$$
$$+ \frac{(r-2m)\sin\varphi\cos\varphi}{2r}c_4 - \frac{(r-2m)(r+m)\sin^2\varphi}{r^2}c + \frac{(r-2m)\sin^2\varphi}{2r^2}$$
$$- \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2r^2}d_4 + \frac{2m\sin^2\varphi}{r^2}d - \frac{(5r-12m)\sin^4\varphi}{2r^4(r-2m)} - \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{r^3(r-2m)}.$$

$$(34)\quad \frac{R_{33}}{\varepsilon^2} = \frac{r}{2(r-2m)}a_{33} - \frac{m}{2(r-2m)^2}a_3 + \frac{m(2r-3m)}{r(r-2m)^3}a + \frac{1}{2r^2\sin^2\varphi}b_{33}$$
$$- \frac{2r-5m}{2r^3(r-2m)\sin^2\varphi}b_3 + \frac{r-3m}{r^4(r-2m)\sin^2\varphi}b + \frac{1}{2r^2}c_{44} - \frac{2r-3m}{2r^2}$$
$$+ \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2r^2}c_4 - \frac{m(2r-3m)}{r^3(r-2m)}c + \frac{1}{2r^2}d_{33} - \frac{2r-5m}{2r^3(r-2m)}d_3$$
$$+ \frac{r-3m}{r^4(r-2m)}d - \frac{(11r^2-36rm+30m^2)\sin^2\varphi}{2r^5(r-2m)^2}.$$

$$(35)\quad \frac{R_{44}}{\varepsilon^2} = \frac{r}{2(r-2m)}a_{44} + \frac{r}{2}a_3 - \frac{m}{r-2m}a + \frac{1}{2r^2\sin^2\varphi}b_{44} + \frac{r-2m}{2r^2\sin^2\varphi}b$$
$$- \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r^2\sin^2\varphi}b_4 + \left[\frac{1}{r^2\sin^4\varphi} - \frac{r-2m}{r^3\sin^2\varphi}\right]b + \frac{r-2m}{2r}c_{44} - \frac{(r-2m)^2}{2r}$$
$$- \frac{(r+m)(r-2m)}{r^2}c + \frac{r-2m}{2r}d_{33} - \frac{r-4m}{2r^2}d_3 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2r^2}d_4$$
$$+ \frac{r-2m}{r^3}d - \frac{1}{r^3(r-2m)} + \frac{(4r-3m)\sin^2\varphi}{r^4(r-2m)}.$$

$$(36)\quad \frac{R_{34}}{\varepsilon^2} = \frac{r}{2(r-2m)}a_{34} - \frac{r-m}{2(r-2m)^2}a_4 + \frac{1}{2r^2\sin^2\varphi}b_{34} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2r^2\sin^2\varphi}b_3$$
$$- \frac{1}{r^3\sin^2\varphi}b_4 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r^3\sin^2\varphi}b - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2r^2}d_3 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r^3}d + \frac{(5r-9m)\sin\varphi\cos}{r^4(r-2m)^2}$$

$$(37)\quad \frac{R_{12}}{\varepsilon^2} = \frac{r-2m}{2r}e_{33} + \frac{1}{2r^2}e_{44} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2r^2}e_4 + \frac{2m}{r^3}e + \frac{5\sin^2\varphi}{4r^2}a_3$$
$$+ \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2r^2(r-2m)}a_4 - \frac{5m\sin^2\varphi}{2r^3(r-2m)}a + \frac{r+2m}{4r^5}b_3 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2r^5}b_4$$
$$+ \left[\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{r^5} - \frac{r+2m}{2r^6}\right]b + \frac{(r-2m)^2\sin^2\varphi}{4r^4}c_3 + \frac{(r-2m)\sin\varphi\cos\varphi}{2r^4}$$
$$- \frac{(r-2m)(2r-m)\sin^2\varphi}{2r^5}c - \frac{(r-2m)\sin^2\varphi}{4r^5}d_3 - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2r^5}d_4$$
$$+ \frac{(3r-2m)\sin^2\varphi}{2r^6}d + \frac{(r+3m)\sin^4\varphi}{2r^7(r-2m)} - \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{r^6(r-2m)}.$$

Diese Ausdrücke sind wiederholt berechnet und kontrolliert worden. Es ist ja klar, daß man bei so komplizierten Ausdrücken, bevor man zur Integration schreitet, erst volle Sicherheit gewinnen muß, daß kein Fehler stehen geblieben ist. Eine weitere Kontrolle bot dann die Anwendung der Transformationen (30), (31).

B. Reduktion auf ein System von $5+5+1+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Bei Betrachtung des Aufbaues der Ausdrücke (32) bis (37) bemerkt man folgendes: In den ersten fünf Ausdrücken tritt e nicht auf, man kann also die Gleichung $R_{12}=0$ zur Bestimmung von e einstweilen zurückstellen und hat nur fünf Gleichungen für die vier Unbekannten a, b, c, d. An diesen Gleichungen fällt nun weiter auf, daß die Abhängigkeit von φ eine verhältnismäßig einfache zu sein scheint. Setzt man jetzt zunächst diese Abhängigkeit in Form einer Fourierschen Reihe an, so ergibt sich aus Symmetriegründen, daß in diesen Reihen die Sinusglieder verschwinden müssen. Wir wandeln aber die so verbleibende Kosinusreihe sofort in eine nach steigenden Potenzen von $\sin^2\varphi$ fortschreitende Reihe um, in der wir uns auf möglichst wenig Glieder zu beschränken bestrebt sein werden, da ja der rotierende Körper kugelähnlich sein soll. Man sieht leicht ein, daß man mindestens zwei Glieder der Reihe nehmen muß, da die „Störungsglieder" zweigliedrig sind (außer in R_{33} und R_{34}).

Wir machen deshalb folgenden Ansatz:

$$(38)\quad \begin{cases} a = a' + a''\sin^2\varphi; \quad b = b'\sin^2\varphi + b''\sin^4\varphi; \quad c = c' + c''\sin^2\varphi; \\ d = d' + d''\sin^2\varphi; \quad e = e'\sin^2\varphi + e''\sin^4\varphi. \end{cases}$$

Setzt man dies ein, so findet man sofort, daß sich tatsächlich jede Gleichung streng in zwei spaltet, von denen die mit der höheren Potenz von $\sin^2\varphi$ behaftete nur die mit zwei Strichen versehenen Unbekannten enthält. Man hat also jetzt für die Integration folgendes Programm:

Zuerst sind fünf gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen a'', b'', c'', d'' zu integrieren, hierauf fünf ähnliche für a', b', c', d', in denen die a'', b'', c'', d'' mit als „Störungsglieder" auftreten. Sodann hat man noch eine Gleichung für e'' und zuletzt noch eine für e' zu integrieren.

Bevor wir dies tun, müssen wir erst noch die Wirkung der erlaubten Transformation (30) auf die neuen Unbekannten studieren. Wir spalten deshalb auch ψ in

$$(39)\qquad \psi = \psi' + \psi''\sin^2\varphi$$

und finden durch Spaltung von (31):

$$(40)\quad \begin{cases} a_1' = a' + \frac{2m(r_1-2m)}{r_1}\psi_3'; & a_1'' = a'' + \frac{2m(r_1-2m)}{r_1}\psi_3''; \\ b_1' = b' + 2r_1^2(r_1-2m)\psi_3' - 4r_1^3\psi''; & b_1'' = b'' + 2r_1^2(r_1-2m)\psi_3'' + \\ c_1' = c' + \frac{2r_1(2r_1-3m)}{r_1-2m}\psi_3' + 2r_1^3\psi_{33}'; & c_1'' = c'' + \frac{2r_1(2r_1-3m)}{r_1-2m}\psi_3'' + 2 \\ d_1' = d' + 2r_1^2(r_1-2m)\psi_3' - 4r_1^3\psi''; & d_1'' = d'' + 2r_1^2(r_1-2m)\psi_3'' + \\ e_1' = e' - \frac{4}{r_1}\psi'' - \frac{r_1-2m}{r_1}\psi_3'; & e_1'' = e'' + \frac{4}{r_1}\psi'' - \frac{r_1-2m}{r_1}\psi_3''. \end{cases}$$

Hierbei wird

$$(41)\quad \begin{cases} r = r_1 + \varepsilon^2 r_1(r_1-2m)(\psi_3' + \psi_3''\sin^2\varphi_1); \\ \varphi = \varphi_1 - 2\varepsilon^2\sin\varphi_1\cos\varphi_1\,\psi''. \end{cases}$$

Geht man nun von der (zutreffenden) Vermutung aus, daß die Gleichunge durch rationale Funktionen von r erfüllt werden können, so zeigt (40 daß man dann stets ψ'' logarithmenfrei so bestimmen kann, daß d Differenz $b_1'' - d_1''$ einen beliebigen rationalen Wert erhält, z. B. den We Null. *Wenn es also überhaupt rationale Lösungen gibt, so gibt es sich auch solche, bei denen $b'' = d''$ ist.* Diese nun wollen wir zuerst au suchen. Wir haben dann für die drei Unbekannten a'', b'', c'' fünf Diff rentialgleichungen. Wegen des ungleichmäßigen Auftretens des Nenne $(r-2m)$ führen wir aber erst noch statt c'' eine neue Unbekannte

$$(42)\quad c''' = c''\cdot(r-2m)$$

ein und betrachten ferner statt R_{33} den Ausdruck $R_1^1 - R_3^3$. Die a (32) bis (36) entspringenden Gleichungen lauten dann, wenn man sie m passenden Potenzen von $(r-2m)$ und r multipliziert, bzw.:

$$(43)\quad (r-2m)^2 a_{33}'' + (2r^2 - 9rm + 10m^2)\frac{a_3''}{r^2} - (6r^2 - 12rm - 2m^2)\frac{}{}$$
$$+ (r-2m)^2\cdot\frac{2mb_3''}{r^4} - (r-2m)^2\cdot\frac{4mb''}{r^5} - (r-2m)^2\cdot\frac{mc_3'''}{r^3}$$
$$+ (r-2m)^2\cdot\frac{mc'''}{r^4} + \frac{3r^2-4rm-6m^2}{r^6} = 0.$$

$$(44)\quad (r-2m)a_3'' - (r+m)\frac{2a''}{r} + (r-2m)^2\frac{b_{33}''}{r^2} + (r-2m)\frac{2mb_3''}{r^3}$$
$$- (r-2m)\frac{6b''}{r^3} - (r-2m)^2\frac{c_3'''}{r^2} - (3r^2-4rm-4m^2)\frac{c'''}{r^3}$$
$$+ \frac{-3r+12m}{r^5} = 0.$$

$$(45)\quad (r-2m)\cdot 2a_3'' - (3r+2m)\frac{2a''}{r} - (r-2m)^2\frac{2b_{33}''}{r^3} + (r-2m)^2\frac{4b}{r^5}$$
$$- (r-2m)^3\frac{4b''}{r^4} + (r-2m)^2\frac{2c_3'''}{r^2} + (r^2-rm-2m^2)\frac{4c'''}{r^3}$$
$$+ \frac{14r-12m}{r^5} = 0.$$

$$(46)\quad (r-2m)a_3'' - (2r+m)\frac{2a''}{r} + (r-2m)^2\frac{b_{33}''}{r^2} + (r-2m)\frac{2mb_3''}{r^3} - (r-2m)\frac{6b''}{r^3} - (r-2m)^2\frac{c_3'''}{r^2} - (5r^2-8rm-4m^2)\frac{c'''}{r^3} + \frac{8r-6m}{r^5} = 0.$$

$$(47)\quad (r-2m)\cdot 2a_3'' - (r-m)\frac{2a''}{r} + (r-2m)^2\frac{2b_3''}{r^3} - (r-2m)^2\frac{4b''}{r^4} - (r^2-3rm+2m^2)\frac{2c'''}{r^3} + \frac{10r-18m}{r^5} = 0.$$

Durch Subtraktion der Gleichung (46) von (44) kommt die von b'' freie Gleichung:

$$(48)\qquad 2a'' + (r-2m)\frac{2c'''}{r^2} + \frac{-11r+18m}{r^5} = 0.$$

Ebenso durch Subtraktion der mit $\frac{m}{r}$ multiplizierten Gleichung (47) von (43):

$$(49)\quad (r-2m)^2 a_{33}'' + (2r^2-11rm+14m^2)\frac{a_3''}{r} - (3r-7m)\frac{2a'''}{r} - (r-2m)^2\cdot\frac{mc_3'''}{r^3} + (3r^2-10rm+8m^2)\frac{mc'''}{r^4} + \frac{3r^2-14rm+12m^2}{r^6} = 0.$$

Hierauf subtrahiere man die mit $\frac{m}{r}$ multiplizierte Gleichung (48) von (49). Dann läßt sich eine Division durch $\left(1-\frac{2m}{r}\right)$ ausführen, und es kommt:

$$(50)\qquad (r-2m)ra_{33}'' + (2r-7m)a_3'' - 6a'' - (r-2m)\frac{mc_3'''}{r^2} + (r-4m)\frac{mc'''}{r^3} + \frac{3r+3m}{r^5} = 0.$$

Schließlich muß man noch (48) nach r differentiieren, mit $\frac{m}{2}$ multiplizieren und zu (50) addieren. Dann erhält man *eine Differentialgleichung für a'' allein*:

$$(51)\quad (r-2m)ra_{33}'' + (2r-6m)a_3'' - 6a'' + \frac{3r^2+25rm-45m^2}{r^6} = 0.$$

Diese Gleichung zweiter Ordnung besitzt eine einparametrige Schar logarithmenfreier Integrale. Man bestätigt am besten durch Einsetzen, daß

$$(52)\qquad a'' = \frac{3}{4mr^3} + \frac{1}{4r^4} - \frac{3m}{2r^5} + \text{Const.}\,(r-2m)^2$$

ist. Die Konstante muß natürlich gleich Null gesetzt werden, da die

Wirkung der Rotation für $r = \infty$ nicht unendlich werden darf. Zu a' liefert (48) den Wert

$$c''' = -\frac{3}{4mr^2} + \frac{15}{4r^3}. \tag{53}$$

Zur Bestimmung von b'' wählen wir zwecks Vermeidung von b_{33}'' die Gleichung (47). Diese lautet nach Einsetzung von (52), (53) und wohlgelungener Division (es ist dies immer eine sehr angenehme Kontrolle) durch $2\cdot\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2$:

$$r b_3'' - 2b'' = \frac{9}{4mr} + \frac{6}{r^2}. \tag{54}$$

Das im Unendlichen verschwindende Integral hiervon lautet

$$b'' = -\frac{3}{4mr} - \frac{3}{2r^2}. \tag{55}$$

Man überzeugt sich durch Einsetzen, daß die gefundenen Integrale die Gleichungen (43) bis (47) befriedigen. Hiermit ist der erste Punkt des Integrationsprogramms erledigt und die Lösung kontrolliert.

Was die Wirkung der erlaubten Transformation auf die nunmehr zu bestimmenden Funktionen a', b', c', d' betrifft, so lehrt (40), daß durch eine solche die Differenz $b' - d'$ (abweichend von $b'' - d''$) nicht geändert werden kann. Wohl aber kann ψ_3' (vielleicht nicht ψ', was aber nichts schadet, da ψ' selbst in (40) und (41) nicht auftritt) logarithmenfrei so bestimmt werden, daß die Änderung einer der Größen b', d' oder a' einen beliebigen rationalen Wert annimmt. In der Hoffnung, daß sich auch für a', b', c', d' rationale Funktionen ergeben werden, können wir also annehmen, daß ψ_3 logarithmenfrei so bestimmt werden kann, daß z. B. $b' = 0$ wird. Dann ergibt sich aus $R_{34} = 0$ sofort, daß auch $d' = 0$ ist. Es sind also nur die zwei Funktionen a' und c' zu bestimmen. Durch eine ähnliche, aber etwas einfachere Rechnung wie oben, deren Unterdrückung gestattet sei, erhält man die im Unendlichen verschwindenden Lösungen:

$$a' = -\frac{1}{2mr^3} - \frac{1}{2r^4}, \qquad b' = 0; \qquad c' = \frac{3(r-m)}{2mr^2(r-2m)^2}; \qquad d' = 0. \tag{56}$$

Jetzt bleibt noch die Bestimmung von e aus $R_{12} = 0$ (Gleichung 37). Diese Gleichung spaltet sich mittels (38) zunächst in folgende:

$$\begin{aligned}(57)\quad & \frac{r-2m}{2r} e_{33}' - \frac{r-2m}{r^3} e' + \frac{4}{r^2} e'' + \frac{5}{4r^2} a_3' - \frac{5m}{2r^3(r-2m)} a' + \frac{1}{r^2(r-2m)} a' \\ & + \frac{r+2m}{4r^5} b_3' - \frac{r+2m}{2r^6} b' - \frac{1}{r^5} b'' + \frac{(r-2m)^2}{4r^4} c_3' - \frac{(r-2m)(2r-m)}{2r^5} c' \\ & + \frac{r-2m}{r^4} c'' - \frac{r-2m}{4r^5} d_3' + \frac{3r-2m}{2r^6} d' - \frac{1}{r^5} d'' - \frac{1}{r^6(r-2m)} = 0.\end{aligned}$$

58) $$\frac{r-2m}{2r}e_{33}'' - \frac{6r-2m}{r^3}e'' + \frac{5}{4r^2}a_3'' - \frac{2r+5m}{2r^3(r-2m)}a'' + \frac{r+2m}{4r^5}b_3''$$
$$+ \frac{r-2m}{2r^6}b'' + \frac{(r-2m)^2}{4r^4}c_3'' - \frac{(r-2m)(4r-m)}{2r^5}c'' - \frac{r-2m}{4r^5}d_3''$$
$$+ \frac{5r-2m}{2r^6}d'' + \frac{3r+3m}{2r^7(r-2m)} = 0.$$

Nach Einsetzung der Werte von a'', b'', c'', d'' geht (58) über in

59) $$\frac{r-2m}{2r}e_{33}'' - \frac{6r-2m}{r^3}e'' - \frac{15}{4mr^6} - \frac{18}{r^7} + \frac{21m}{r^8} = 0.$$

Das in Betracht kommende Integral von (59) lautet

60) $$e'' = -\frac{5}{8m^2r^3} - \frac{5}{8mr^4} + \frac{3}{4r^5}.$$

Die Gleichung (57) wird nach Einsetzung und Division durch $\left(1-\frac{2m}{r}\right)$:

61) $$\frac{1}{2}e_{33}' - \frac{1}{r^2}e' - \frac{5}{2m^2r^5} - \frac{27}{4mr^6} = 0,$$

und ihr Integral:

62) $$e' = \frac{1}{2m^2r^3} + \frac{3}{4mr^4}.$$

C. Die Lösung.

Zusammenfassend haben wir für das Linienelementquadrat

4) $$dr^2 = \alpha\,du^2 + 2\omega\,du\,d\vartheta + \beta\,d\vartheta^2 + \gamma\,dr^2 + \delta\,d\varphi^2$$

zunächst folgende Ausdrücke der Koeffizienten gefunden:

63)
$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{r-2m}{r} + \varepsilon^2\left\{\dfrac{-r-m}{2mr^4} + \dfrac{3r^2+rm-6m^2}{4mr^5}\sin^2\varphi\right\}; \\ \beta = r^2\sin^2\varphi + \varepsilon^2\sin^2\varphi\cdot\left\{0 + \dfrac{-3r-6m}{4mr^2}\sin^2\varphi\right\}; \\ \gamma = \dfrac{r}{r-2m} + \varepsilon^2\left\{\dfrac{3r-3m}{2mr^2(r-2m)^2} + \dfrac{-3r+15m}{4mr^3(r-2m)}\sin^2\varphi\right\}; \\ \delta = r^2 + \varepsilon^2\left\{0 + \dfrac{-3r-6m}{4mr^2}\sin^2\varphi\right\}; \\ \omega = \dfrac{\varepsilon\sin^2\varphi}{r} + \varepsilon^3\sin^2\varphi\cdot\left\{\dfrac{2r+3m}{4m^2r^4} + \dfrac{-5r^2-5rm+6m^2}{8m^2r^5}\sin^2\varphi\right\}, \end{cases}$$

Ausdrücke, die noch anderweitig etwas normiert werden können, da ja eine Transformation der Form (30) freigestellt ist. Wählt man z. B. in (39)

64) $$\psi_3' = \frac{r+m}{4m^2r^3(r-2m)}; \qquad \psi'' = \frac{r+m}{8m^2r^3},$$

so erhält man statt (63) die etwas einfacheren Ausdrücke:

$$(65)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{r-2m}{r} + \varepsilon^2 \cdot \dfrac{r+2m}{4mr^4}\sin^2\varphi; \\ \beta = r^2\sin^2\varphi + 0\,(!); \\ \gamma = \dfrac{r}{r-2m} + \varepsilon^2\left\{\dfrac{-1}{2m^2r(r-2m)} + \dfrac{2r-3m}{4m^2r^2(r-2m)}\sin^2\varphi\right\}; \\ \delta = r^2 + \varepsilon^2\cdot\dfrac{r+m}{2m^2r}\sin^2\varphi; \\ \omega = \dfrac{\varepsilon\sin^2\varphi}{r} + \varepsilon^3\sin^2\varphi\left\{\dfrac{-1}{4m^2r^3} + \dfrac{r-2m}{8m^2r^4}\sin^2\varphi\right\}. \end{cases}$$

Mit diesen Werten lautet die Wurzel aus der Determinante $\Delta\,\delta\,\gamma$:

$$(66)\quad \sqrt{g} = r^2\sin\varphi + \varepsilon^2\sin\varphi\cdot\left\{-\frac{1}{4m^2} + \frac{\sin^2\varphi}{2m^2}\right\}$$
$$= r^2\sin\varphi - \varepsilon^2\frac{\sin\varphi\cos 2\varphi}{4m^2}.$$

Auch die Werte (65) wurden durch direktes Einsetzen in die Differentialgleichungen kontrolliert.

Die Koordinatenwahl, die zu (65) führt, dürfte wegen $b=0$ empfehlenswert sein. Doch wollen wir auch noch auf solche Koordinaten transformieren, für die $\sqrt{g_1} = r_1^2\sin\varphi_1$ wird. Um dies zu tun, beachten wir, daß sich $\sqrt{g}$ bei der Transformation (30) mit der Funktionaldeterminante von r, φ nach r_1, φ_1 multipliziert. Wir haben also zur Bestimmung von ψ die Gleichung:

$$(67)\quad r^2\sin\varphi\cdot\left[1-\frac{\varepsilon^2\cos 2\varphi}{4m^2r^2}\right]\cdot\left[1+\varepsilon^2\left\{\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1(r_1-2m)\frac{\partial\psi}{\partial r_1}\right) - \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi_1^2}\right\}\right]$$
$$= r_1^2\sin\varphi_1,$$

in deren ersten Teil noch die Werte (30) einzusetzen sind. Dann kommt

$$(68)\quad \frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1(r_1-2m)\frac{\partial\psi}{\partial r_1}\right) - \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi_1^2} + 2(r_1-2m)\frac{\partial\psi}{\partial r_1} - \operatorname{cotg}\varphi_1\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_1} = \frac{\cos 2\varphi_1}{4m^2r_1^2}.$$

Mittels (39) spaltet sich diese in zwei Gleichungen, in denen wir den Index 1 weglassen:

$$(69)\quad r(r-2m)\psi_{33}'' + (4r-6m)\psi_3'' + 6\psi'' = -\frac{1}{2m^2r^2};$$

$$(70)\quad r(r-2m)\psi_{33}' + (4r-6m)\psi_3' - 4\psi'' = +\frac{1}{4m^2r^2}.$$

(69) besitzt nur ein einziges rationales Integral:

$$(71)\quad \psi'' = \frac{-1}{8m^2r^2}.$$

Dagegen bleibt in ψ_3' (auf ψ' selbst kommt es nicht an) merkwürdigerweise *eine Konstante h willkürlich*:

72)
$$\psi_3' = \frac{-r+2hm}{4m^2r^3(r-2m)}.$$

Mit diesen ψ-Werten erhält man die dritte Form der Lösung:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{r-2m}{r} + \varepsilon^2\left\{\dfrac{-r+2hm}{2mr^4} + \dfrac{3r-2m}{4mr^4}\sin^2\varphi\right\}; \\ \beta = r^2\sin^2\varphi + \varepsilon^2\sin^2\varphi\cdot\left\{\dfrac{h}{mr} - \dfrac{1}{mr}\sin^2\varphi\right\}; \\ \gamma = \dfrac{r}{r-2m} + \varepsilon^2\left\{\dfrac{(1-4h)r+6hm}{2mr^2(r-2m)^2} + \dfrac{3}{4mr^2(r-2m)}\sin^2\varphi\right\}; \\ \delta = r^2 + \varepsilon^2\cdot\left\{\dfrac{h}{mr} - \dfrac{1}{2mr}\sin^2\varphi\right\}; \\ \omega = \dfrac{\varepsilon\sin^2\varphi}{r} + \varepsilon^3\sin^2\varphi\cdot\left\{\dfrac{r-hm}{2m^2r^4} + \dfrac{-5r+2m}{8m^2r^4}\sin^2\varphi\right\}. \end{array}\right. \quad \sqrt{g} = r^2\sin\varphi.$$

Man kann schwanken, ob man für die willkürliche Konstante h den Wert 0 oder 1 vorziehen soll.

(Eingegangen am 26. Juli 1921.)

Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen.

B. Explizite Aufstellung statischer axialsymmetrischer Felder.

Von

Rudolf Bach in Essen-Hügel.

Mit einem Zusatz über das statische Zweikörperproblem.

Von

H. Weyl in Zürich.

I. Einleitung.

Nach Weyl[1]) und Levi-Civita[2]) läßt sich die metrische Fundamentalform eines statischen axialsymmetrischen Feldes im leeren Raum durch Einführung der „kanonischen Zylinderkoordinaten" auf die Form bringen

$$(1) \qquad ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \quad f^2 d\sigma^2 = r^2 d\vartheta^2 + e^{2\gamma}(dr^2 + dz^2);$$

ϑ ist das Azimut einer Meridianebene, $r = 0$ die Gleichung der Symmetrieachse, $x^{(1)} = z$, $x^{(2)} = r$ sind Koordinaten in der Meridianebene; $f = e^{\psi}$ und γ hängen nur von z und r ab. ψ genügt der Potentialgleichung

$$(2) \qquad \Delta\psi = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(r\psi_z)}{\partial z} + \frac{\partial(r\psi_r)}{\partial r}\right\} = 0$$

(ψ_z, ψ_r bedeuten die Ableitungen nach z und r), und γ bestimmt sich aus

$$(3) \qquad \gamma_z = 2r\psi_z\psi_r, \quad \gamma_r = r(\psi_r^2 - \psi_z^2);$$

wegen (2) ist nämlich

$$(4) \qquad d\gamma = 2r\psi_z\psi_r dz + r(\psi_r^2 - \psi_z^2)dr$$

ein totales Differential.

---

[1]) Zur Gravitationstheorie, Ann. d. Phys. **54** (1918), S. 117–145; mit einem Zusatz dazu: Ann. d. Phys. **59** (1919), S. 185–188.

[2]) ds^2 einsteiniani in campi newtoniani, VIII. Note, Rend. Acc. dei Lincei 1919.

Die Schwarzschildsche Lösung für das polarsymmetrische Feld eines Massenpunktes ergibt sich, wenn man für ψ diejenige Lösung von (2) nimmt, die im kanonischen Raum das Newtonsche Potential einer mit einer gewissen konstanten Dichte belegten Strecke der Achse gibt. Bezeichnet man die Länge dieser Strecke, in z-Koordinaten gemessen, mit $2l$, den Abstand des Aufpunktes von den beiden Endpunkten der Strecke, in kanonischen Koordinaten euklidisch gemessen, mit r_1 bzw. r_2, so erhält man

$$\psi = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{r_1 + r_2 - 2l}{r_1 + r_2 + 2l}; \qquad \gamma = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4l^2}{4 r_1 r_2}. \tag{5}$$

Durch eine konforme Abbildung der Meridianebene läßt sich die Übereinstimmung mit der Schwarzschildschen Formel nachweisen.

II. Das Feld eines Ringes.

Das Newtonsche Potential eines unendlich dünnen Kreisringes von der Masse m, dessen Achse die z-Achse ist, lautet bekanntlich:

$$\psi = -\frac{km}{c^2 R}, \tag{6}$$

wo k die gewöhnliche Gravitationskonstante, c die Lichtgeschwindigkeit und R das arithmetisch-geometrische Mittel aus den Entfernungen r_1, r_2 des Aufpunktes P von den beiden Durchstoßpunkten des Ringes mit der Meridianebene nach P bedeutet:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{r_1^2 \cos^2 \omega + r_2^2 \sin^2 \omega}}. \tag{7}$$

Hält der Ring sich selbst vermöge innerer Spannungen im Gleichgewicht, so gelten außerhalb des Ringes die homogenen Gravitationsgleichungen, und γ bestimmt sich aus (3) oder (4). Die Integration gelingt, wenn wir durch Einführung des Moduls des elliptischen Integrals (7) an Stelle von z eine Koordinatenänderung vornehmen. Durch Reduktion von (7) auf die Normalform finden wir die Werte der Moduln (Bezeichnungen in der Weise, die in der Theorie der elliptischen Integrale üblich ist):

$$x^2 = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}; \qquad x'^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \qquad (r_1 < r_2). \tag{8}$$

Es wird dann

$$\psi = -\frac{2 km K}{c^2 \pi r_2}. \tag{9}$$

Ferner ist

$$\begin{cases} r_1^2 = z^2 + (r - a)^2, \\ r_2^2 = z^2 + (r + a)^2, \end{cases} \tag{10}$$

wenn der Ringradius mit a bezeichnet wird, folglich:

$$(11)\qquad z^2 = -(r+a)^2 + \frac{4ra}{\varkappa^2}; \qquad r_1^2 = \frac{4ra\varkappa'^2}{\varkappa^2}; \qquad r_2^2 = \frac{4ra}{\varkappa^2},$$

und

$$(12)\qquad z\frac{\partial z}{\partial r} = -(r+a) + \frac{2a}{\varkappa^2}; \qquad z\frac{\partial z}{\partial(\varkappa^2)} = -\frac{2ra}{\varkappa^4}.$$

Hiermit wird

$$(13)\qquad \psi = -\frac{kmK\varkappa}{c^2\pi\sqrt{ra}}.$$

Jetzt setzen wir

$$(14)\quad \gamma(r,z) = \gamma(r,z(r,\varkappa^2)) \equiv \Gamma(r,\varkappa^2); \quad \psi(r,z) = \psi(r,z(r,\varkappa^2)) \equiv \Psi(r,\varkappa^2)$$

so daß

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Gamma}{\partial r} = \dfrac{\partial\gamma}{\partial r} + \dfrac{\partial\gamma}{\partial z}\cdot z_r = r(\psi_r^2 - \psi_z^2) + 2r\psi_r\psi_z z_r; \\ \dfrac{\partial\Gamma}{\partial(\varkappa^2)} = \dfrac{\partial\gamma}{\partial z}\cdot z_{\varkappa^2} = 2r\psi_r\psi_z\cdot z_{\varkappa^2}. \end{cases}$$

Nun ist

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \psi_r + \psi_z\cdot z_r, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial(\varkappa^2)} = \psi_z\cdot z_{\varkappa^2}.$$

Setzt man die sich hieraus ergebenden Werte von ψ_r und ψ_z in (15) ein, so kommt:

$$(16)\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\Gamma}{\partial r} = \Psi_r^2 - \frac{1+z_r^2}{(z_{\varkappa^2})^2}\cdot\Psi_{\varkappa^2}^2; \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\Gamma}{\partial(\varkappa^2)} = 2\Psi_r\Psi_{\varkappa^2} - 2\frac{z_r}{z_{\varkappa^2}}\cdot\Psi_{\varkappa^2}^2.$$

Dies wird mit Benutzung der Werte (12):

$$(17)\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial r} = r\Psi_r^2 - \frac{\varkappa^4\varkappa'^2}{r}\Psi_{\varkappa^2}^2; \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial\varkappa^2} = 2r\Psi_r\Psi_{\varkappa^2} + \frac{(2a-(r+a)\varkappa^2)\varkappa^2}{a}\cdot\Psi_{\varkappa^2}^2.$$

Nun ist weiter, wenn $\dfrac{\partial K}{\partial(\varkappa^2)} \equiv \dot{K}$ gesetzt wird (die Bezeichnung K' ist ja nicht gestattet):

$$(18)\qquad \Psi_r = \frac{mkK\varkappa}{2c^2\pi r\sqrt{ar}}; \qquad \Psi_{\varkappa^2} = -\frac{mk(K+2\varkappa^2\dot{K})}{2c^2\pi\varkappa\sqrt{ar}}.$$

Bezeichnet man die im Zähler des letzten Bruches auftretende Klammer vorübergehend zur Abkürzung mit L, so folgt aus (17), (18):

$$(19)\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial r} = \frac{m^2k^2\varkappa^2}{4c^4\pi^2ar^2}(K^2 - \varkappa'^2L^2),$$

$$(20)\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial(\varkappa^2)} = \frac{-2m^2k^2KL + m^2k^2L^2(2-\varkappa^2)}{4c^4\pi^2ar} - \frac{m^2k^2\varkappa^2L^2}{4c^4\pi^2a^2}.$$

In (19) läßt sich jetzt die Integration nach r unmittelbar ausführen:

$$(21)\qquad \Gamma = \frac{m^2k^2\varkappa^2}{4c^4\pi^2ar}(-K^2 + \varkappa'^2L^2) + \Phi(\varkappa^2).$$

Zur Bestimmung der Integrationsfunktion $\Phi(\varkappa^2)$ muß man (21) nach $\varkappa^2$ differentiieren und mit (20) vergleichen. Zunächst ergibt sich Übereinstimmung der von r abhängigen Glieder vermöge der Differentialgleichung der K-Funktion:

$$4\varkappa^2\varkappa'^2\ddot{K} + 4(\varkappa'^2 - \varkappa^2)\dot{K} - K = 0, \tag{22}$$

und für Φ ergibt sich der Ausdruck:

$$\Phi(\varkappa^2) = -\frac{m^2k^2}{4c^4\pi^2a^2}\int \varkappa^2 L^2 d(\varkappa^2). \tag{23}$$

Die Quadratur läßt sich glücklicherweise ausführen. Man überzeugt sich durch Differentiieren, daß

$$\int \varkappa^2 (K + 2\varkappa^2\dot{K})^2 d(\varkappa^2) \equiv \varkappa^4 K^2 - 4\varkappa^4\varkappa'^2 K\dot{K} + 4\varkappa^4\varkappa'^2(1+\varkappa'^2)\dot{K}^2 + \text{Konst.} \tag{24}$$

ist. Die Integrationskonstante ist Null, damit Γ im Unendlichen verschwindet. Führt man wieder an Stelle der Funktionsbezeichnung Γ die Größenbezeichnung γ ein, so lautet unser Ergebnis:

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma = {} & \frac{m^2k^2\varkappa^4}{4c^4\pi^2 ar}(-K^2 + 4\varkappa'^2 K\dot{K} + 4\varkappa^2\varkappa'^2\dot{K}^2) \\ & + \frac{m^2k^2\varkappa^4}{4c^4\pi^2a^2}(-K^2 + 4\varkappa'^2 K\dot{K} - 4\varkappa'^2(1+\varkappa'^2)\dot{K}^2).\end{aligned}} \tag{25}$$

Wir müssen uns noch überzeugen, daß auf der Achse γ verschwindet. Es wird in der Nähe der Achse sowohl r wie $\varkappa^2$ unendlich klein. Um γ zu berechnen, braucht man die Potenzentwicklung von K bis zum dritten Glied:

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\varkappa^2}{4} + \frac{9\varkappa^4}{64} + \ldots\right), \qquad \dot{K} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{9\varkappa^2}{32} + \ldots\right).$$

Es kommt, wenn man r^2 neben ra, aber nicht ra neben z^2 vernachlässigt:

$$\gamma = -\frac{m^2k^2(z^2+2ra)\cdot r^2a^2}{2c^4(a^2+z^2)^3} + \text{Glieder mit höheren Potenzen von } r. \tag{26}$$

Für $r = 0$ verschwindet also γ in zweiter Ordnung, wie es sein soll.

Wenig lohnend ist die Ausführung numerischer Berechnungen und die Entwicklung in der Umgebung der Ringlinie ($\varkappa^2 \sim 1$), wo γ mit Gliedern in $(\log\varkappa')^2$ beginnt. Bemerkenswert ist vielleicht, daß bei solcher linienhaften Massenverteilung die Singularität erst auf der Linie selbst eintritt.

III. Das Feld zweier kugelähnlichen Körper.

Um die in I. angegebene Lösung zu verallgemeinern, müssen wir von einer solchen Lösung der Gleichung (2) ausgehen, die zwei getrennten Belegungen der z-Achse entspricht. Wir wählen also auf der z-Achse vier Punkte P_i $(i=1, 2, 3, 4)$ mit den Koordinaten bzw. $z_1 > z_2 > z_3 > z_4$, setzen

$$z_1 - z_2 = 2l; \quad z_3 - z_4 = 2l'; \quad z_2 - z_3 = 2d, \tag{27}$$

denken uns die Strecken $2l$ und $2l'$ mit konstanten Massendichten belegt und machen entsprechend für ψ den Ansatz:

$$\psi = \frac{m}{2} \cdot \log \frac{r_1 + r_2 - 2l}{r_1 + r_2 + 2l} + \frac{m'}{2} \cdot \log \frac{r_3 + r_4 - 2l'}{r_3 + r_4 + 2l'}, \tag{28}$$

wo r_i $(i=1, 2, 3, 4)$ die euklidisch gemessenen Entfernungen des Aufpunktes von P_i sind. Die beiden Körper werden nun freilich nicht ohne stützende Spannungen in Ruhe verharren können. Wir wollen aber zunächst feststellen, von welcher Beschaffenheit das Gravitationsfeld im leeren Raum ist; dort gelten die Gleichungen (3). Wir berechnen also die Ableitungen von ψ. Da

$$\frac{\partial r_i}{\partial r} = \frac{r}{r_i}, \qquad \frac{\partial r_i}{\partial z} = \frac{z - z_i}{r_i}$$

ist, so kommt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial r} = \dfrac{2ml\left(\dfrac{r}{r_1} + \dfrac{r}{r_2}\right)}{(r_1 + r_2)^2 - 4l^2} + \dfrac{2m'l'\left(\dfrac{r}{r_3} + \dfrac{r}{r_4}\right)}{(r_3 + r_4)^2 - 4l'^2}, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = \dfrac{2ml\left(\dfrac{z - z_1}{r_1} + \dfrac{z - z_2}{r_2}\right)}{(r_1 + r_2)^2 - 4l^2} + \dfrac{2m'l'\left(\dfrac{z - z_3}{r_3} + \dfrac{z - z_4}{r_4}\right)}{(r_3 + r_4)^2 - 4l'^2}. \end{cases} \tag{29}$$

Nun ist identisch:

$$z - z_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2 - 4l^2}{4l}; \qquad z - z_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2 + 4l^2}{4l}; \tag{30}$$

$$\begin{cases} 16r^2l^2 = [(r_1 + r_2)^2 - 4l^2][4l^2 - (r_1 - r_2)^2]; \\ 16r^2l'^2 = [(r_3 + r_4)^2 - 4l'^2][4l'^2 - (r_3 - r_4)^2]. \end{cases} \tag{31}$$

Mittels (30) läßt sich die zweite Zeile von (29) umformen in:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{m(r_2 - r_1)}{2r_1r_2} + \frac{m'(r_4 - r_3)}{2r_3r_4}. \tag{29'}$$

Denkt man sich nun die Werte (29), (29') in (3) eingesetzt, so sieht man, daß $d\gamma$ eine quadratische Form in m und m' wird. Die beiden quadratischen Glieder dieser Form entsprechen den von jeder der beiden belegten Strecken erzeugten Einzelfeldern, das mittlere Glied gibt die Modifikation des durch Überlagerung entstehenden Feldes durch die Wechsel-

irkung beider Strecken. (Der Fall dreier und mehrerer Strecken bietet ann nichts Neues mehr.) Die den beiden Einzelfeldern entsprechenden ösungen sind nach I, Formel (5) bekannt. Wir schreiben diese Teilelder so:

$$32) \qquad \gamma_{11} = \frac{m^2}{2} \cdot \log \frac{(r_1+r_2)^2 - 4l^2}{4r_1r_2}; \qquad \gamma_{22} = \frac{m'^2}{2} \cdot \log \frac{(r_3+r_4)^2 - 4l'^2}{4r_3r_4}.$$

Man überzeugt sich durch Ausdifferentiieren, daß (3) erfüllt ist. Zu diesen Einzelfeldern kommt nun noch ein mit mm' proportionales, dessen Berechnung wir uns jetzt zuwenden. Wir bezeichnen das betreffende Glied von $d\gamma$ mit $d\gamma_{12}$. Man erhält zunächst:

$$33) \quad \frac{r_1r_2r_3r_4}{2mm'r} d\gamma_{12} = \left[\frac{4ll'r^2(r_1+r_2)(r_3+r_4)}{[(r_1+r_2)^2-4l^2][(r_3+r_4)^2-4l'^2]} - \frac{(r_2-r_1)(r_4-r_3)}{4} \right] dr + \left[\frac{lr(r_1+r_2)(r_4-r_3)}{(r_1+r_2)^2-4l^2} + \frac{l'r(r_3+r_4)(r_2-r_1)}{(r_3+r_4)^2-4l'^2} \right] dz.$$

Nun benutzen wir folgende Relationen:

$$34) \quad \begin{cases} 8l^2 r dr = (r_2^2 - r_1^2 + 4l^2) r_1 dr_1 + (r_1^2 - r_2^2 + 4l^2) r_2 dr_2, \\ 2l dz = r_2 dr_2 - r_1 dr_1, \\ l r_3^2 = (l+d) r_2^2 - d \cdot r_1^2 + 4ld(l+d), \\ l r_4^2 = (l+l'+d) r_2^2 - (l'+d) r_1^2 + 4l(l'+d)(l+l'+d). \end{cases}$$

Wir trennen $d\gamma_{12}$ in ein Glied mit $r_4 + r_3$ und ein solches mit $r_4 - r_3$

$$35) \quad \frac{r_1r_2r_3r_4}{2mm'r} d\gamma_{12} = rl' \cdot (r_4+r_3) \left\{ \frac{4rl \cdot (r_1+r_2)}{[(r_1+r_2)^2-4l^2][(r_3+r_4)^2-4l'^2]} dr + \frac{r_2-r_1}{(r_3+r_4)^2-4l'^2} dz \right\} + (r_4-r_3) \left\{ \frac{rl(r_1+r_2)}{(r_1+r_2)^2-4l^2} dz - \frac{r_2-r_1}{4} dr \right\}.$$

Im ersten Glied der zweiten Klammer wenden wir (31) an und erhalten:

$$36) \quad \frac{r_1r_2r_3r_4}{2mm'r} d\gamma_{12} = \frac{rl'(r_4+r_3)}{[(r_1+r_2)^2-4l^2][(r_3+r_4)^2-4l'^2]} \left\{ (r_1+r_2) \cdot 4rl dr + (r_2-r_1)[(r_1+r_2)^2-4l^2] dz \right\} + \frac{r_4-r_3}{16rl} \left\{ (r_1-r_2) \cdot 4rl dr + (r_1+r_2)[4l^2 - (r_1-r_2)^2] dz \right\}.$$

Jetzt führen wir als unabhängige Differentiale dr_1 und dr_2 mittels 34) ein, wobei beträchtliche Vereinfachungen eintreten. Es wird zunächst:

$$\frac{2r_3r_4}{mm'} d\gamma_{12} = -\frac{16ll'r^2(r_3+r_4)\,d(r_1+r_2)}{[(r_1+r_2)^2-4l^2][(r_3+r_4)^2-4l'^2]} + (r_3-r_4)\,d(r_1-r_2).$$

Sodann, mittels (31):

$$(37)\quad \frac{d\gamma_{12}}{mm'} = \frac{dr_1}{(r_1+r_2)^2-4l^2}\left\{-\frac{r_2(r_1+r_2)+4ld}{r_3}+\frac{r_2(r_1+r_2)+4l(l'+d)}{r_4}\right\}$$
$$+\frac{dr_2}{(r_1+r_2)^2-4l^2}\left\{+\frac{r_1(r_1+r_2)-4l(l+d)}{r_3}-\frac{r_1(r_1+r_2)-4l(l+l'+d)}{r_4}\right\}$$

An dieser Stelle überzeuge man sich, daß der Ausdruck ein exakte Differential ist. Man findet dabei, daß die Glieder mit dem Nenner r_3 bzw. r_4 je für sich ein solches bilden. Zur Integration kann man deshalb $d\gamma_{12}$ in zwei entsprechende Teile spalten, von denen wir den ersten mit $d_{12,3}$ bezeichnen. Der Nenner r_3 ist in r_1, r_2 irrational, den rationalen Teil der Brüche zerlegen wir in Partialbrüche und führen Summe σ und Differenz δ von r_1 und r_2 als unabhängige Variable ein:

$$(38)\quad \frac{4r_3\,d\gamma_{12,3}}{mm'} = d\sigma\left[\frac{\delta+2(l+2d)}{\sigma+2l}+\frac{\delta-2(l+2d)}{\sigma-2l}\right]-2\,d\delta.$$

Hierbei ist

$$4l\cdot r_3^2 = l\delta^2-2(l+2d)\delta\sigma+l\sigma^2+16ld(l+d).$$

Zur Integration von (38) bilden wir zunächst bei konstant gehaltenem σ das Integral

$$\int\frac{d\delta}{r_3} = 2\log\{l\delta-(l+2d)\sigma+\sqrt{l}\sqrt{l\delta^2-2(l+2d)\delta\sigma+l\sigma^2+16ld(l+d)}\}$$

Der Logarithmand ist auch gleich

$$l\delta-(l+2d)\sigma+2lr_3\equiv L.$$

Dann ist zunächst

$$(39)\quad \frac{\gamma_{12,3}}{mm'} = -\log L+f(\sigma),$$

wo $f(\sigma)$ durch Differentiation von (39) und Vergleich mit (38) sich zu

$$\frac{1}{2}\log(\sigma^2-4a^2)+\text{Konst.}$$

ergibt. Man hat also gefunden, wenn man wieder zu r_1, r_2 zurückkehrt

$$(40)\quad \frac{\gamma_{12,3}}{mm'} = \frac{1}{2}\log[(r_1+r_2)^2-4a^2]-\log[lr_3-dr_1-(l+d)r_2]+\text{Konst.}$$

Das Glied $\gamma_{12,4}$ ergibt sich hieraus, wenn man statt 3 und d bzw. setzt: 4 und $l'+d$. Bei Subtraktion gemäß (37) fällt das vordere Glied weg und es bleibt:

$$(41)\quad \frac{\gamma_{12}}{mm'} = \log\frac{lr_4-(l'+d)r_1-(l+l'+d)r_2}{lr_3-dr_1-(l+d)r_2}+\text{Konst.}$$

Damit γ_{12} im Unendlichen verschwindet, muß Konst. $=\log\frac{d}{l'+d}$ sein.

Ist die Konstante so bestimmt, so bleibt γ_{12} ungeändert bei der ubstitution

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & l' & l \\ r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & l & l' \end{pmatrix},$$

vie durch eine kleine Rechnung zu beweisen ist.

Bei der Diskussion der erhaltenen Formeln nehmen wir $m = m' = 1$ n; dieser Ansatz allein entspricht ja nach (5) dem Fall, daß es sich um wei „Massenpunkte" handelt. Dann lautet das gewonnene Resultat olgendermaßen:

$$\begin{cases} f^2 = \dfrac{r_1+r_2-2l}{r_1+r_2+2l} \cdot \dfrac{r_3+r_4-2l'}{r_3+r_4+2l'}, \\ e^{2\gamma} = \dfrac{(r_1+r_2)^2-4l^2}{4r_1r_2} \cdot \dfrac{(r_3+r_4)^2-4l'^2}{4r_3r_4} \cdot \left(\dfrac{d(l'+d)r_1+d(l+l'+d)r_2-ldr_4}{d(l'+d)r_1+(l+d)(l'+d)r_2-l(l'+d)r_3} \right)^2. \end{cases}$$

Nur bei dieser Annahme über m, m' wird der räumliche Teil $d\sigma^2$ ler metrischen Fundamentalform auf den massebelegten Strecken der Achse veder 0 noch ∞. Es gilt z. B. auf $P_1 P_2$, wenn

$$z - z_2 = l(1 - \cos u)$$

esetzt wird:

$$\frac{d\sigma^2}{4l^2} = \frac{(l+l'+d)^2\left(d+l\sin^2\frac{u}{2}\right)}{(l+d)^2\left(l'+d+l\sin^2\frac{u}{2}\right)} du^2 + \frac{l'+d+l\sin^2\frac{u}{2}}{d+l\sin^2\frac{u}{2}} \sin^2 u\, d\vartheta^2.$$

Für $\lim l'/d = 0$, d. h. wenn der Einfluß des zweiten Körpers zu ver- achlässigen ist, geht das über in

$$d\sigma^2 = 4l^2(du^2 + \sin^2 u\, d\vartheta^2),$$

das Linienelementquadrat einer Kugelfläche. Die beiden „Massenpunkte" ind also, mit dem invarianten $d\sigma^2$ ausgemessen, kugelähnliche Rotations- örper.

Auf den Stücken $z > z_1$ und $z < z_4$ der Achse ist die metrische Fundamentalform vollständig regulär. Auf der Strecke $P_2 P_3$ jedoch, welche die beiden Körper trennt, liegt, obwohl diese Strecke eine endliche Länge besitzt,

$$\int d\sigma = \frac{d(l+l'+d)}{(l+d)(l'+d)} \cdot \int_0^{2d} \sqrt{\frac{(2l+2d-\zeta)(2l'+\zeta)}{\zeta(2d-\zeta)}}\, d\zeta,$$

eine Singularität, da γ dort nicht 0 wird, sondern den konstanten Wert

43) $$\Gamma = \lg \frac{d(l+l'+d)}{(l+d)(l'+d)}$$

annimmt. Darin äußert sich die Notwendigkeit, zwischen den beiden

Körpern stützende Spannungen anzubringen; das Nähere darüber enthalten die folgenden Ausführungen von Herrn Weyl.

IV. Das statische Zweikörper-Problem (von H. Weyl).

Im statischen axialsymmetrischen Fall muß das Schema der Komponenten der tensoriellen Energiedichte die nebenstehende Gestalt besitzen, wobei die Zeit t als 0-te Koordinate $x^{(0)}$, das Azimut ϑ als Koordinate $x^{(3)}$ geführt ist; die Komponenten hängen nur von $x^{(1)}, x^{(2)}$ ab. Die Möglichkeit, das „kanonische Koordinatensystem" einzuführen, ist, wie die Gravitationsgleichungen zeigen, allein durch die Annahme

$\mathfrak{T}_0^0$	0	0	0
0	$\mathfrak{T}_1^1$	$\mathfrak{T}_2^1$	0
0	$\mathfrak{T}_1^2$	$\mathfrak{T}_2^2$	0
0	0	0	$\mathfrak{T}_3^3$

$$\mathfrak{T}_1^1 + \mathfrak{T}_2^2 = 0 \tag{44}$$

bedingt, welche besagt, daß die Spannung in der Meridianebene besteht aus einem Zug in gewisser Richtung und einem Druck *von der gleichen Stärke* senkrecht dazu. Dies setzen wir als erfüllt voraus und operieren fortan im kanonischen Bildraum. Führen wir die Bezeichnung

$$\mathfrak{T}_3^3 = r\varrho', \qquad \mathfrak{T}_0^0 = r(\varrho + \varrho') \tag{45}$$

ein, so lauten die Gravitationsgleichungen

$$\Delta\psi = \frac{1}{2}\varrho, \qquad \frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2} + \left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2\right\} = -\varrho'; \tag{46}$$

$$\mathfrak{T}_1^1 = -\mathfrak{T}_2^2 = \gamma_r - r(\psi_r^2 - \psi_z^2), \quad -\mathfrak{T}_1^2 = -\mathfrak{T}_2^1 = \gamma_z - 2r\psi_r\psi_z. \tag{47}$$

Dabei ist der konstante Faktor $8\pi\varkappa$ des Einsteinschen Gravitationsgesetzes mit in die Energiekomponenten aufgenommen. Ist außerhalb eines endlichen Bereichs $\mathfrak{T}_i^k = 0$, so ergibt sich als die *Masse* des das Gravitationsfeld erzeugenden Körpersystems (vgl. die Definition auf S. 247—248 meines Buchs „Raum Zeit Materie", 4. Aufl., Springer 1921) der Koeffizient m in der Entwicklung von $f^2 = e^{2\psi}$ nach Potenzen der reziproken Entfernung R von einem festen Zentrum: $f^2 = 1 - \frac{m}{R} + \ldots$, welche für große R gültig ist. Nach (46) ist $m = \int \varrho dV$, wo dV das Volumelement $2\pi r\,dr\,dz$ des kanonischen Bildraums bedeutet. Hat das „leere" Gebiet, in welchem die $\mathfrak{T}$ verschwinden, mehrere, etwa zwei Löcher, so kann man die Potentialfunktion ψ auf eine und nur eine Weise in zwei Teile spalten $\psi_1 + \psi_2$, so daß ψ_1 eine im ganzen Außengebiet des ersten Loches, ψ_2 eine im Außengebiet des zweiten Loches reguläre, im Unendlichen verschwindende Potentialfunktion ist. Die Koeffizienten m_1, m_2 in der Entwicklung

$$e^{2\psi_1} = 1 - \frac{m_1}{R} + \ldots, \qquad e^{2\psi_2} = 1 - \frac{m_2}{R} + \ldots$$

ird man als die Massen der beiden Einzelsysteme anzusehen haben; anach ist $m = m_1 + m_2$ und m_1 gleich dem über das erste Loch, m_2 eich dem über das zweite Loch zu erstreckenden Volumintegral $\int \varrho\, dV$. lso ist ϱ *die Massendichte im kanonischen Raum*. Sind mehrere Körper orhanden, so müssen sie durch stützende Spannungen, welche den Gravitationskräften entgegenwirken, in Ruhe gehalten werden; immerhin aber erden wir in den von *Materie* (nicht von Spannungen) freien Zwischenäumen

$$\varrho = 0 \tag{48}$$

u setzen haben.

Weitere Annahmen über die $\mathfrak{T}_i^k$ wollen wir nicht machen. Ist ψ als otentialfunktion in dem von Materie freien Raum G bekannt, so bestimmt sich γ außerhalb eines ganz im Endlichen gelegenen, alle Körper nschließenden *einfach zusammenhängenden* Bereichs L aus (4) zusammen it der Forderung, daß γ im Unendlichen verschwindet. Innerhalb des on Materie freien Teils von L, L', wählen wir, unter Wahrung des egulären Anschlusses nach außen, γ beliebig, doch so, daß es bei Annäherung an die Symmetrieachse verschwindet wie r^2. Die stützenden pannungen, (welche außerhalb L verschwinden), ergeben sich dann aus 46), (47). In meinen früheren, oben von Herrn Bach zitierten Arbeiten atte ich speziell $\varrho' = 0$ angenommen; dann bestimmt die Differentialeichung (46) für γ, zusammen mit der Grenzbedingung $\gamma = 0$ auf der ymmetrieachse, γ und damit die $\mathfrak{T}_i^k$ $(i, k = 1, 2)$ eindeutig. Die so erltenen radial-axialen Spannungen sind nun wohl geeignet, die schlimmste ngularität, ein von 0 verschiedenes γ auf der Achse, zu ersetzen; sie eseitigen jedoch diese Singularität nicht vollständig, da die Ableitung γ_r if der Achse nach wie vor im allgemeinen nicht verschwinden wird. an kommt also doch nicht ohne eine azimutale Spannung ϱ' us, die mit einer gleich großen Energiedichte verbunden ist; ir enthalten uns aber jetzt jeder näheren Bestimmung der $\mathfrak{T}_i^k$ über die oben angegebenen Voraussetzungen hinaus.

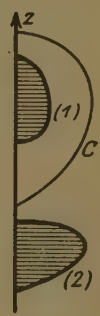


Fig. 1.

Handelt es sich beispielsweise um zwei getrennte Körper, e je ein Stück der Achse einschließen (Fig. 1), so ist die n der Richtung der Achse wirkende) Kraft K, mit welcher e stützenden Spannungen die beiden Körper auseinander lten, gleich 2π mal dem Fluß des Vektors $(\mathfrak{T}_1^1, \mathfrak{T}_1^2)$ durch ne Kurve $\mathfrak{C}$ hindurch, welche in der Meridianhalbebene die iden Körper trennt:

$$K = 2\pi \int_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{T}_1^2 dz - \mathfrak{T}_1^1 dr).$$

Weil die Divergenz dieses Vektors in ganz G verschwindet, kommt es auf die genauere Lage von $\mathfrak{C}$ nicht an. Der von den Körpern unbedeckte Teil der Meridianhalbebene ist einfach zusammenhängend, und demnach gibt es eine in G eindeutige, im Unendlichen verschwindende Funktion γ^*, welche sich aus (4) bestimmt:

$$d\gamma^* = r(\psi_r^2 - \psi_z^2)dr + 2r\psi_r\psi_z dz.$$

Auf einem zusammenhängenden, zur Begrenzung von G gehörigen Stück der Achse ist danach $\gamma_z^* = 0$, $\gamma_r^* = 0$; infolgedessen $\gamma^* = \text{konst.}$, $\gamma_r^* = 0$. Auf den beiden ins Unendliche reichenden Stücken ist insbesondere $\gamma^* = 0$; der konstante Wert aber, den γ^* auf dem zwischen den beiden Körpern gelegenen Teil der Achse annimmt, werde mit Γ bezeichnet. Die Formeln (47) schreiben sich jetzt

$$\mathfrak{T}_1^1 = \gamma_r - \gamma_r^*, \qquad \mathfrak{T}_1^2 = -(\gamma_z - \gamma_z^*):$$

daher

$$\int_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{T}_1^2 dz - \mathfrak{T}_1^1 dr) = \int_{\mathfrak{C}} \{(\gamma_z^* - \gamma_z)dz + (\gamma_r^* - \gamma_r)dr\} = \int_{\mathfrak{C}} d(\gamma^* - \gamma)$$

gleich dem Unterschied von $\gamma^* - \gamma$ am Anfang und Ende der Kurve $\mathfrak{C}$. Dieser Unterschied ist aber, da γ auf den zu G gehörigen Stücken der Achse Null wird, $= \Gamma$. Daher kommt schließlich, unter Zugrundelegung der gewöhnlichen Maßeinheiten,

$$K = \frac{c^2 \Gamma}{4\varkappa} \tag{49}$$

Wie wir also unsere stützenden Spannungen auch annehmen mögen, wenn sie nur der die Einführung eines kanonischen Koordinatensystems ermöglichenden Bedingung (44) *genügen und der Raum zwischen den Körpern im Sinne der Bedingung* (48) *materiefrei ist: immer hindern sie die beiden Körper mit der gleichen, durch* (49) *gegebenen Kraft K, der Gravitationsanziehung zu folgen; dieses K dürfen wir daher mit einigem physikalischen Grund als die Gravitationskraft bezeichnen, mit der sich die beiden Körper anziehen.* Damit hat der konstante Wert von γ^* auf dem die Körper trennenden Achsenstück eine interessante Deutung erfahren.

In dem unter III. von Herrn Bach durchgerechneten Fall bekommen wir so

$$K = \frac{c^2}{4\varkappa} \cdot \lg \frac{(d+l)(d+l')}{d(d+l+l')}$$

als *Maßzahl der Kraft, mit welcher sich zwei Massenpunkte anziehen*, deren Massen die Gravitationsradien l und l' besitzen und deren Abstand im kanonischen Bildraum $= 2d$ ist. Setzen wir voraus, daß l und l'

lein gegenüber d sind, so kommt in erster Annäherung der Newton-he Wert

$$\frac{c^2}{\varkappa} \cdot \frac{ll'}{(2d)^2}.$$

Die physikalische Bedeutung dieses Resultats wird man nicht über-eiben dürfen; für die Lösung des wirklichen Zweikörper-Problems, die estimmung der Bewegung zweier sich anziehender schwerer Massen, ist amit nichts gewonnen. Aber es ist doch ein physikalisch sinnvoller akter Ausdruck gewonnen für die Kraft, mit der sich zwei Massenpunkte ach der Einsteinschen Theorie anziehen.

Ist der erste Körper ringförmig (Fig. 2), so wird γ^* nur ndeutig, wenn wir in der Meridianhalbebene einen Schnitt von m zur Achse legen. Die Größe Γ, welche nach (49) die raft K bestimmt, wird hier gleich $\int d\gamma^*$, erstreckt über eine eschlossene Kurve $\mathfrak{C}$, die den Meridianschnitt des Körpers (1) ngibt (s. Fig. 2). Ist der erste Körper (1) ein linearer Ring, er zweite (2) ein Massenpunkt und sind $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ die zu diesen eiden Einzelkörpern gehörigen Potentiale ψ — Formel (5) und 6) —, so kommt es bei der Berechnung jenes Integrals nur f den gemischten Teil an:

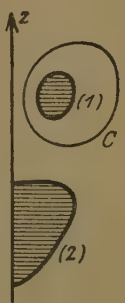


Fig. 2.

$$d\gamma_{12}^* = 2r\,(\psi_r^{(1)}\psi_r^{(2)} - \psi_z^{(1)}\psi_z^{(2)})\,dr + 2r\,(\psi_z^{(1)}\psi_r^{(2)} + \psi_r^{(1)}\psi_z^{(2)})\,dz.$$

edeutet r_1 in der Meridianebene den Abstand des Aufpunktes vom Durch-oßpunkt D_1 des Ringes, so ist für unendlichkleines r_1:

$$\psi^{(1)} \sim \frac{\varkappa m}{\pi a} \cdot \lg \frac{a}{r_1}$$

der Radius des Ringes im kanonischen Raum, m seine Masse). Nehmen ir für $\mathfrak{C}$ eine unendlich kleine, D_1 umschlingende Kurve, so ergibt sich raus

$$\int_{\mathfrak{C}} (\psi_r^{(1)} dr + \psi_z^{(1)} dz) \sim 0, \qquad \int_{\mathfrak{C}} (-\psi_z^{(1)} dr + \psi_r^{(1)} dz) \sim 2\pi,$$

glich

$$\Gamma = 4\varkappa m \cdot \psi_z^{(2)}.$$

Die Kraft K ist diejenige, welche sich aus dem Potential $mc^2 \cdot \psi^{(2)}$ leitet (für $\psi^{(2)}$ ist der Wert dieser Größe an der Stelle D_1 zunehmen).

Für die *Anziehung zweier linearer Ringe* erhält man im kanonischen aum genau den Newtonschen Wert.

(Eingegangen am 16. Juli 1921.)

Arithmetical equivalents for a remarkable identity between theta functions.

By

E. T. Bell.

1. Except when $\alpha = \beta = \gamma = 1$, or in the cases derived immediately from this by the transformation of the first order, Jacobi's fundamental identity for the multiplication of four theta functions[1]) at once expresses $\vartheta_1' \vartheta_\alpha(x+y)\vartheta_\beta(y+z)\vartheta_\gamma(z+x)$ in terms of sums of products of theta functions. In the excepted cases the corresponding expressions are found from a remarkable identity first obtained by Hermite[2]):

$$\begin{aligned}(1)\quad &-\vartheta_0'(x+y+z)\vartheta_0(x)\vartheta_0(y)\vartheta_0(z)+\vartheta_0(x+y+z)\vartheta_0'(x)\vartheta_0(y)\vartheta_0(z)\\ &+\vartheta_0(x+y+z)\vartheta_0(x)\vartheta_0'(y)\vartheta_0(z)+\vartheta_0(x+y+z)\vartheta_0(x)\vartheta_0(y)\vartheta_0'(z)\\ &=\vartheta_1'\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(y+z)\vartheta_1(z+x).\end{aligned}$$

which, as will be noticed, contains also the first derivatives of the thetas with respect to their arguments. This identity, although not included in Jacobi's, nevertheless can be obtained very simply from it, as shown by Enneper[3]).

Either Jacobi's identity or (1) gives rise to a host of arithmetical equivalents; and it is clear that the consequences of the two identities will be distinct, at least under elementary transformations. By an arithmetical equivalent of (1) we mean a relation between integers which implies (1) and which is implied by (1). We proceed presently to the derivation of three such equivalents, and it will be evident from the manner in which they are obtained that these are but three of a great many that may be found in essentially the same way. From the above definition of an equivalent it is obvious that ultimately all equivalents

[1]) Werke, 1, pp. 506, 509.

[2]) Comptes Rendus, Paris, 85 (1877), p. 731.

[3]) Mathematische Annalen, 17 (1880), p. 213.

f (1) must express the same fact concerning integers. In particular it ıust be possible to transform any given equivalent into any other by urely arithmetical processes. These transformations in the majority of ases present considerable difficulty, and we make no attempt to exhibit hem. It is in fact a point of interest in this kind of work that aparently unrelated arithmetical truths should appear from the standpoint f elementary analysis merely as different aspects of the same thing, in his case of the identity (1). The arithmetical results have been verified umerically.

2. Changing q into $-q$ in (1) we get

$$\begin{aligned} &-\vartheta_3'(x+y+z)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z)+\vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3'(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z)\\ 2)\quad &+\vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3'(y)\,\vartheta_3(z)+\vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3'(z)\\ &=\vartheta_1'\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(y+z)\,\vartheta_1(z+x); \end{aligned}$$

nd hence, on equating coefficients of like powers of q,

$$\begin{aligned} &\sum(l_1-l_2-l_3-l_4)\sin\{(l_1+l_2)x+(l_1+l_3)y+(l_1+l_4)z\}\\ &=\sum(-1)^{\frac{1}{2}(m_1m_2m_3m_4-1)}m_1\sin\{(m_2+m_4)x+(m_2+m_3)y+(m_3+m_4)z\} \end{aligned}$$

vhere the summations extend to all even integers $l_i \gtrless 0$ and to all odd ıtegers $m_i \gtrless 0$ $(i=1,2,3,4)$ that satisfy

4) $$4m=l_1^2+l_2^2+l_3^2+l_4^2=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2,$$

ı which m is odd and constant.

Let now $g(u,v,w)$ denote a function which takes a single definite alue whenever u, v, w are integers $\gtrless 0$, and which is subject only to he conditions

5) $$g(u,v,w)=-g(-u,-v,-w),\quad g(0,0,0)=0.$$

Ve emphasize that beyond these restrictions, g is general in the widest ense. Then, as a special consequence of a theorem on trigonometric lentities established elsewhere[4]), we can infer from the identity in x, y, z,

$$\sum_i p_i\sin(a_ix+b_iy+c_iz)=0,$$

ı which p_i, a_i, b_i, c_i are integers $\gtrless 0$, the following,

$$\sum_i p_i\,g(a_i,b_i,c_i)=0.$$

Ience, the summations being as in (3), we may assert that (3) implies

6) $$\begin{aligned} &\sum(l_1-l_2-l_3-l_4)\,g(l_1+l_2,l_1+l_3,l_1+l_4)\\ &=\sum(-1)^{\frac{1}{2}(m_1m_2m_3m_4-1)}m_1\,g(m_2+m_4,m_2+m_3,m_3+m_4), \end{aligned}$$

[4]) Transactions of the American Math. Society, 22 (1921), p. 5.

Conversely, it is obvious that (6) implies (3), which evidently implies (2) and (1). For if with Jacobi (loc. cit. p. 501) we take as definitions of the theta functions their expansions as power series in q, it is clear that, as a relation between series, (3) implies (2). Hence (2), (6) are equivalent.

3. The very light conditions (5) can be satisfied in many ways which still leave a wide margin of generality, and which severally lead to results of arithmetical interest. Let (x, y, z) denote any permutation of (u, v, w). Then $g(u, v, w)$ in (6) may be replaced by any one of the following, in which the appropriate restrictions are indicated by the equations:

$$g_1(x, y, z) = -g_1(-x, y, z) = g(x, -y, -z),\ g(0, y, z) = 0;$$
$$g_2(x, y, z) = g_2(-x, y, z) = -g_2(x, -y, -z),\ g_2(x, 0, 0) = 0;$$
$$g_3(x, y, z) = -g_3(-x, y, z) = g_3(x, -y, z) = g_3(x, y, -z)\ g(0, y, z) = 0;$$
$$g_4(x, y, z) = -g_4(-x, y, z) = -g_4(x, -y, z) = -g_4(x, y, -z),$$
$$g_4(0, y, z) = g_4(x, 0, z) = g_4(x, y, 0) = 0;$$
$$g_5(x, y) = -g_5(-x, y) = g_5(x, -y),\ g_5(0, y) = 0;$$
$$g_6(x) = -g_6(-x),\ g_6(0) = 0.$$

From these we see by inspection the forms of the most general polynomials satisfying the conditions imposed upon $g(u, v, w)$. Let the a_i, b_i, c_i denote integers > 0, the p_i, q_i, r_i, s_i constants other than zero. Then the polynomials are

$$\sum_i p_i (q_i x)^{2a_i - 1} (r_i y + s_i z)^{2b_i},$$
$$\sum_i p_i (q_i x)^{2a_i} (r_i y + s_i z)^{2b_i - 1},$$
$$\sum_i p_i (q_i x)^{2a_i - 1} (r_i y)^{2b_i} (s_i z)^{2c_i}$$
$$\sum_i p_i (q_i x)^{2a_i - 1} (r_i y)^{2b_i - 1} (s_i z)^{2c_i - 1},$$
$$\sum_i p_i (q_i x)^{2a_i - 1} (r_i y)^{2b_i},$$
$$\sum_i p_i (q_i x)^{2a_i - 1}.$$

The functions $g_1, \ldots, g_6$ are general beyond the restrictions stated.

4. Let us examine the kind of information furnished by (6) in special cases. For this it will be sufficient to consider one simple example, $g(u, v, w) = uvw$. Taking this from of $g(u, v, w)$ in (6), and omitting the terms which destroy one another owing to differences of sign when the summations are performed over all solutions of (4), we find

$$(7) \quad \sum \left[l_1^4 - l_1^2 (l_2^2 + l_3^2 + l_4^2) \right] = 2 \sum (-1)^{\frac{1}{2}(m_1 m_2 m_3 m_4 - 1)} m_1 m_2 m_3 m_4 .$$

o reduce this, let $N_r(n, s)$ denote the total number of representations n as a sum of r squares precisely s of which are odd, and write $\zeta_r(n)$ r the sum of the r th powers of all the divisors of n. Then by well nown theorems we have

$$N_4(4m, 0) = 8\zeta_1(m) = 1/7\,\zeta_1(4m),$$

nce m is odd; and hence from (7), on using $4m - l_1^2 = l_2^2 + l_3^2 + l_4^2$ om (4), we find

$$7\sum\left[l_1^4 - (-1)^{\frac{1}{2}(m_1 m_2 m_3 m_4 - 1)} m_1 m_2 m_3 m_4\right] = n^2\zeta_1(n),$$

which $n \equiv 4 \bmod 8$, and the summation extends to all even $l_1 \gtrless 0$ and all odd $m_i \gtrless 0$ satisfying

$$n = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2,$$

$l_3, l_4 \gtrless 0$ being even. In (8) we may replace l_1 by l_2, l_3 or l_4 from mmetry, and hence by addition of the results, (8) is the same as

$$7\sum\left[l_1^4 + l_2^4 + l_3^4 + l_4^4 - 4(-1)^{\frac{1}{2}(m_1 m_2 m_3 m_4 - 1)} m_1 m_2 m_3 m_4\right] = 4n^2\zeta_1(n).$$

rom this and

$$n^2 - l_1^4 - l_2^4 - l_3^4 - l_4^4 = 2(l_1^2 l_2^2 + l_1^2 l_3^2 + \ldots + l_3^2 l_4^2)$$

e find a similar relation involving $l_1^2 l_2^2 + \ldots + l_3^2 l_4^2$; and hence by mmetry since $\sum l_1^2 l_2^2 = \ldots = \sum l_3^2 l_4^2$, we get from (8) the corresponding lation in which l_1^4 is replaced by $l_1^2 l_2^2$. It is interesting to compare (8) ith a somewhat similar theorem stated without proof by Liouville[5]), nd proved arithmetically by Stern[6]).

5. The identity (2) and its equivalent (6) are related through the presentations of $4m$ in the pair of arithmetical forms given in (4). ne further, less obvious, equivalents of (1) or (2) are related through ne or more quadratic forms, corresponding to (4), which no longer are clusively sums of squares as in the first case. A great variety of these ore interesting equivalents can be obtained by using, as below, the ithmetical developments for the doubly periodic functions of the second nd, $\varphi_{\alpha\beta\gamma}(u, v)$, defined by

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma}(u, v) = \frac{\vartheta_1' \vartheta_\alpha(u, v)}{\vartheta_\beta(u)\,\vartheta_\gamma(v)}.$$

ese functions, together with (in some cases) the doubly periodic functions of the third kind, are imported into (1) by multiplying it throughout the same theta quotient and then rearranging the result. The process

---

[5]) Journal des Mathématiques, (2) **3** (1858), pp. 357–360.

[6]) Journal für d. r. u. a. Math., **105** (1889), pp. 251–262.

will be sufficiently clear from the two equivalents which we derive next. We shall require the following development,

$$(10) \qquad \varphi_{100}(u, v) = 4\sum q^{\frac{1}{2}m}\Big[\sum \sin(dx + \delta y)\Big],$$

in which the outer summation refers to all odd $m = 1, 3, 5, \ldots$, and the inner to all divisors $d, \delta > 0$ of m such that $d\delta = m$. The sum enclosed in [] is the coefficient of $q^{\frac{1}{2}m}$, and similarly in writing other series. This series is due to Hermite[7]) (in a slightly different form).

6. Dividing (2) throughout by $\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)$ we get

$$(11) \quad [\vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3'(z) - \vartheta_3'(x+y+z)\vartheta_3(z)] + \vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(z)\left[\frac{\vartheta_3'(x)}{\vartheta_3(x)} + \frac{\vartheta_3'(}{\vartheta_3(}\right.$$
$$= \vartheta_1(x+z)\vartheta_1(y+z)\varphi_{133}(x, y).$$

The development of $\varphi_{133}(x, y)$ is found from that of $\varphi_{100}(x, y)$ by changing x, y into $x + \frac{\pi}{2}, y + \frac{\pi}{2}$,

$$(12) \qquad \varphi_{133}(x, y) = -\varphi_{100}\left(x + \tfrac{\pi}{2}, y + \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$= 4\sum q^{\frac{1}{2}m}[(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\sum \sin(dx + \delta y)];$$

and from the classical series for the logarithmic derivative of $\vartheta_0(u)$ we find at once

$$(13) \quad \frac{\vartheta_0(u)}{\vartheta_0(u)} = 4\sum q^n\Big[\sum \sin 2tx\Big], \quad \frac{\vartheta_3'(u)}{\vartheta_3(u)} = 4\sum q^n\Big[(-1)^n\sum \sin 2tx\Big],$$

where the outer summation extends to all positive integers $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, and the inner to all divisors t of n such that τ is odd, t odd or even according as n is odd or even, and $n = t\tau$. On substituting for the functions $\vartheta_3(u)$, $\vartheta_3'(u)$ their developments in (11) and likewise for the remaining functions from (12), (13), we find that the general coefficients of the general power of q in (11) are summed with respect to all solutions of the following system in which n is an arbitrary integer > 0:

$$(14) \qquad 4n = l_1^2 + l_2^2 = l_1'^2 + l_2'^2 + 4t_3'\tau_3' = m_1''^2 + m_2''^2 + 2d_3''\delta_3'',$$

in which $l_1, l_2, l_1', l_2' \gtrless 0$ are even, $m_1'', m_2'' \gtrless 0$ are odd, $\tau_3', d_3'', \delta_3'' > 0$ are odd, and $t_3' > 0$ is odd or even. For simplicity in writing (15) put $n_3' = t_3'\tau_3'$, $m_3'' = d_3''\delta_3''$. Then, proceeding as in the derivation of (6), we infer that (11) is equivalent to

---

[7]) Oeuvres, 4. p. 199.

$$\sum l_3[g(l_2, l_2, l_1+l_3) - g(l_1, l_1, l_1+l_3)]$$

5) $$+4\sum(-1)^{n_3'}[g(l_1'+2t_3', l_1', l_1'+l_2') - g(l_1', l_1'+2t_3', l_1'+l_2')]$$
$$= 4\sum(-1)^{\frac{1}{2}(m_1''m_2''m_3''-1)} g(m_1''+d_3'', m_2''+\delta_3'', m_1''+m_2''),$$

ie summations extending to all solutions of the prescribed kinds for n xed of the system (14). As before it follows that (2), (15) are equi-alent.

7. The next equivalent is of particular interest because it involves so the divisors d, δ of the fixed odd integer m which is separated into uadratic forms as follows:

6) $$m = d\delta = d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + d_3\delta_3 = 2t_1'\tau_1' + d_2'\delta_2'$$

which $d, \delta, d_1, \delta_1, d_2, \delta_2, d_3, \delta_3, \tau_1', d_2', \delta_2' > 0$ are odd, $t_1' > 0$ is odd even.

Divide (1) throughout by

$$\vartheta_0(x)\vartheta_0(y)\vartheta_0(z)\vartheta_0(x+y+z),$$

nd write the result in the form

7) $$\varphi_{100}(x+y+z, -z)\varphi_{100}(y, z)\varphi_{100}(x, z)$$
$$+\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2(z)}\left[\frac{\vartheta_0'(x+y+z)}{\vartheta_0(x+y+z)} - \frac{\vartheta_0'(x)}{\vartheta_0(x)}\frac{\vartheta_0'(y)}{\vartheta_0(y)}\right] = \frac{\vartheta_1'^2\vartheta_0'(z)}{\vartheta_0^3(z)}.$$

To give a simple equivalent of this we require in addition to the ries (10), (13) the following

8) $$\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2(u)} = 4\sum q^{\frac{1}{2}m}\Big[\sum d\cos(d-\delta)u\Big],$$

9) $$\frac{\vartheta_1'^2\vartheta_0'(u)}{\vartheta_0^3(u)} = 2\sum q^{\frac{1}{2}m}\Big[\sum(d^2-m)\sin(d-\delta)u\Big],$$

which the outer summations are as defined for (10). We need not op here to give the derivations of (18), (19), which can be checked in rious ways, but remark that both can be obtained quite simply from 0). From (17) by means of (10), (13), (18), (19) we find the llowing equivalent of (1) in the same way as before:

$$
\begin{aligned}
(20)\qquad & 8\sum[g(d_1-d_3,\, d_1+d_2,\, d_1-\delta_1+\delta_2-\delta_3) \\
& \quad +g(d_1+d_3,\, d_1-d_2,\, d_1-\delta_1-\delta_2+\delta_3) \\
& \quad -g(d_1+d_3,\, d_1+d_2,\, d_1-\delta_1+\delta_2-\delta_3) \\
& \quad -g(d_1-d_3,\, d_1-d_2,\, d_1-\delta_1-\delta_2-\delta_3)] \\
& 4\sum d_2'[g(2t_1',\, 2t_1',\, 2t_1'+d_2'-\delta_2')+g(2t_1',\, 2t_1',\, 2t_1'-d_2'+\delta_2) \\
& \quad -g(2t_1',\, 0,\, d_2'-\delta_2')-g(2t_1',\, 0,\, -d_2'+\delta_2') \\
& \quad -g(0,\, 2t_1',\, d_2'-\delta_2')-g(0,\, 2t_1',\, -d_2'+\delta_2')] \\
& \quad =\sum(d^2-m)\,g(0,\, 0,\, d-\delta),
\end{aligned}
$$

the summation extending for m constant to all solutions of (16) of the kinds prescribed.

(Eingegangen am 11. August 1921.)

Axiomatische Begründung der transfiniten Kardinalzahlen. I.

(Herrn K. Hensel zum sechzigsten Geburtstag.)

Von

Adolf Fraenkel in Marburg a. d. L.

Inhalt.

Einleitung. Seite

§ 1. Das Axiomensystem 157
§ 2. Die Unabhängigkeit der Axiome 164
§ 3. Folgerungen in bezug auf die Addition 171
§ 4. Folgerungen in bezug auf die Multiplikation 179

Bezeichnungen.

	Seite		Seite
ddition	157	Menge von KZen, abgezählte	177
eschränktheitsaxiom	163	— — — , endliche .	177
it	159	Multiplikation	157
eich	173	Produkt	160
ößer	173	Summe	159
undbereich $\mathfrak{G}$	157	transfinit	159
ardinalzahl, KZ	157	Vielfaches, natürliches . . .	176
einer	173	vollständige additive Zerlegung	162
enge (unmittelbare, mittelbare)	158		

Für die Einführung und Behandlung der meisten mathematischen griffe sind die *genetische* und die *axiomatische Methode* insofern eichberechtigt, als beide Methoden durchführbar sind und die Wahl ischen ihnen, außer vom Gesichtspunkt der Einfachheit, vor allem von schmacksmomenten und von den subjektiven Zielen der Darstellung abngt. Es gibt aber Begriffe, für die eine genetische Behandlung überupt nicht möglich ist und deren axiomatische Begründung daher auch

die sonstigen Gegner der Axiomatik als nützlich und sogar als notwendig anerkennen werden. Solche Fälle treten bei der ersten Grundlegung der großen mathematischen Wissensgebiete auf; außer den Grundlagen der Geometrie sei die Begründung der Mengenlehre hervorgehoben, für die sich der Cantorsche Mengenbegriff als zu weit und daher unbrauchbar erwiesen hat und für die deshalb Cantors genetische Betrachtung durch Herrn Zermelos axiomatische[1]) ersetzt werden mußte[2]); ferner die Einführung der natürlichen Zahlen, die — wenn man nicht von mengentheoretischen Grundlagen ausgehen will — durch die von Herrn Peano formulierten Axiome[3]) geschehen kann.

Diesen Gegenständen tritt, in naturgemäßem Anschluß an die natürlichen Zahlen, die Einführung der *Mächtigkeiten* oder *Kardinalzahlen* im mengentheoretischen Sinn an die Seite. Die Versuche Cantors und einiger seiner Nachfolger, namentlich Herrn B. Russells, den Begriff der Kardinalzahl (auf Grund des Mengenbegriffs) zu *definieren*, haben in logischer und mathematischer Hinsicht unbefriedigende Resultate gezeitigt[4]). Dies bedeutet allerdings an sich keine Erschütterung der Fundamente der Mengenlehre, da streng genommen für diese der Begriff der Kardinalzahl (wie der des Ordnungstypus und der Ordnungszahl) gar nicht erforderlich ist. Es kommen nämlich in der Mengenlehre keine anderen Urteile über Kardinalzahlen vor als solche, die aussagen, daß entweder zwei Kardinalzahlen *gleich* sind oder daß eine *kleiner* ist als die andere; Urteile beider Art lassen sich aber in bekannter Weise auf Urteile über die Äquivalenz oder Nichtäquivalenz von Mengen zurückführen[5]). Daß dennoch die wirkliche Vermeidung des Begriffs der Kardinalzahl zu unerträglichen Umständlichkeiten in der Darstellung der Mengenlehre führen würde, bedarf keiner Hervor-

---

[1]) Math. Ann. 65 (1908), S. 261—281. — Für die Ausfüllung gewisser Lücken in dieser Betrachtung vgl. meinen in den Math. Ann. 86 (1922) erscheinenden Aufsatz „Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre" sowie eine weitere, an meinen Jenaer Vortrag (Jahresb. d. D. Math.-Ver. 30 (1921), S. 97f.) anknüpfende Arbeit. (Zusatz bei der Korrektur.)

[2]) Die Axiomatik des Herrn Schoenflies (Kon. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings 22 (1920), S. 784—810; Math. Ann. 83 (1921), S. 173—200), die ein sehr umfangreiches Axiomensystem benutzt, dessen Reduzibilität nur durch eine Unabhängigkeitsuntersuchung zu klären ist, beschränkt sich bewußt auf ein spezielles *Teilgebiet* der Mengenlehre. (Zusatz bei der Korrektur.)

[3]) Z. B. Genocchi-Peano, Differentialrechn. u. Grundz. d. Integralr. (deutsch v. Bohlmann u. Schepp, Leipz. 1899), S. 353f. Vgl. auch sachlich und für Literaturangaben: A. Loewy, Lehrb. d. Algebra I (Leipz. 1915), S. 1ff.; J. A. Gmeiner und H. Hahn im Jahresber. d. D. Math.-Ver. 30 (1921), S. 82—91 und 170—179.

[4]) Vgl. z. B. die Darstellung bei F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (Leipz. 1914), S. 46f., 453. Ferner G. Hessenberg im Taschenbuch f. Mathematiker u. Physiker, 3. Jhrg. (Leipz. u. Berl. 1913), S. 70/1.

[5]) Vgl. die Darstellung in § 2 der genannten Abhandlung Zermelos.

ung. Daher dürfte eine axiomatische Einführung der (endlichen und endlichen) Kardinalzahlen auch *nach* der Zermeloschen Axiomatisierung allgemeinen Mengenlehre eine vorhandene Lücke ausfüllen. Über- s ist der Begriff der Kardinalzahl ein für sich so bedeutungsvoller und abhängiger, daß seine axiomatische Begründung unabhängig von der all- meinen[6]) Grundlegung der Mengenlehre wünschenswert ist. Dieses Ziel d mit der folgenden Darstellung angestrebt.

Aus dem zuletzt Gesagten erhellt, daß der bisher nur auf axioma- chem Weg einwandfrei erhaltene Begriff der *Menge*[7]), der beim Rechnen t Kardinalzahlen kaum entbehrlich ist, in der nachstehenden Darstellung *initorisch* eingeführt werden muß (Def. 1 und 2 auf S. 158); in die De- ition gehen natürlich die (nicht definierten) primitiven Begriffe der folgen- n Axiomatik ein, während umgekehrt der so definierte Mengenbegriff in n Axiomen selbst verwendet wird[8]). Bei der fraglichen Definition war ht die größtmögliche Allgemeinheit der leitende Gesichtspunkt, sondern Ziel, einen für die Zwecke der *Behandlung der Kardinalzahlen* hin- chenden Mengenbegriff einwandfrei zu gewinnen. Man kann sich übrigens schwer überzeugen, daß der Umfang dieses Mengenbegriffs allen mathe- tisch in Betracht kommenden Anforderungen genügt.

Im einzelnen sei noch folgendes bemerkt: Ich habe mich nicht be- iht, die Benutzung des Begriffs und der Eigenschaften der kleinsten türlichen Zahlen (der Eins und der Zwei) zu vermeiden (so z. B. in iom II, S. 159), weil ich (in Übereinstimmung mit wohl den meisten rfür interessierten Fachgenossen) der Meinung bin, daß diese Zahlen h ohne Zirkelmethoden nicht in befriedigender Weise definieren lassen. gegen ist natürlich die axiomatische Einführung des *allgemeinen* Begriffs r natürlichen Zahl, d. h. der endlichen Kardinalzahl, in den folgenden trachtungen mit enthalten. — Das im folgenden eingeführte Axiomen- tem ist kein „kategorisches" oder „vollständiges" Axiomensystem[9]). r allen Axiomen genügende Bereich von Kardinalzahlen ist zwar, wenn in den Axiomen vorkommende Addition bekannt ist, vollständig be-

[6]) Gewisse einfache spezielle Überlegungen aus der Mengenlehre (im Anschluß eine geeignete Definition des Mengenbegriffs) werden auch im folgenden nicht mieden (vgl. z. B. S. 176f.).

[7]) Den allgemeinen, nicht der Mathematik angehörigen Begriff eines Bereichs asse) von Elementen habe ich (vgl. Zermelo, a. a. O.) nicht erörtern zu sollen laubt und auch die Frage, wann zwei Bereiche verschieden sind, als in durchaus listischer Weise beantwortet vorausgesetzt (vgl. Fußnote 25 auf S. 161).

[8]) Daß diese gegenseitige Verflechtung, auf die an anderer Stelle noch eingegangen den soll, nicht etwa einen Zirkel bedeutet, erhellt aus der Entwicklung in § 3.

[9]) Vgl. O. Veblen, Transact. of the Amer. Math. Soc. 5 (1904), S. 346 oder Fraenkel, Journ. f. Math. 141 (1912), S. 76.

stimmt; aber diese Addition selbst ist durch die Axiome wohl sehr weit gehend, jedoch nicht vollkommen festgelegt[10]). Daher sind alle das Axiomensystem befriedigenden Bereiche zwar auf einen bestimmten unter ihnen eindeutig und isomorph abbildbar, aber diese Abbildung ist nicht notwendig *umkehrbar* eindeutig. Insbesondere ist so die Beziehung des axiomatisch eingeführten Bereichs zum Bereich der gewöhnlichen Cantorschen Kardinalzahlen zwar bei *geeigneter*, nicht aber bei *jeder* Interpretation der im folgenden benutzten Addition (und damit der Multiplikation) eine umkehrbar eindeutige; nur für den Teilbereich, der außer den endlichen Kardinalzahlen noch $\aleph_0$ umfaßt, ist die Beziehung unter allen Umständen umkehrbar eindeutig und isomorph. Auf die fragliche Vervollständigung, deren Richtung in Fußnote 56 (S. 188) angedeutet wird, wurde im vorliegenden, für sich völlig abgeschlossenen Aufsatz verzichtet, um den Begriff der Kardinalzahl in allgemeinerem und, vom Standpunkt der folgenden Betrachtung aus, reinerem Sinn hervortreten zu lassen. Die Vervollständigung des Axiomensystems und die *ausdrückliche* Herstellung der Beziehung zum Bereich der gewöhnlichen Kardinalzahlen — die implizit auch im vorliegenden Aufsatz deutlich hervortritt — soll einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Was den Nachweis der *Unabhängigkeit der Axiome* betrifft, der bekanntlich für Zermelos Axiomensystem der Mengenlehre noch aussteht[11]), so gelang es, ihn für das folgende Axiomensystem vollständig zu erbringen. In bezug auf die Widerspruchslosigkeit verweise ich auf meine an anderer Stelle[12]) gemachten grundsätzlichen Bemerkungen.

Auswahlprinzip und Wohlordnungssatz (und damit auch die Vergleichbarkeit der Kardinalzahlen[13])) werden im vorliegenden Aufsatz (abgesehen vom Unabhängigkeitsbeweis) nicht ausdrücklich benutzt[14]). Daß man aber ohne diese Prinzipien nicht wirklich allgemeine Mengenlehre — auch nicht allgemeine Theorie der Mächtigkeiten und Kardinalzahlen — treiben kann, gilt für den axiomatischen Standpunkt nicht minder als für den genetischen (vgl. Axiom VIII, S. 161). Im übrigen sei für Einzelbemerkungen, auch solche prinzipieller Art, auf die folgende Darstellung selbst verwiesen.

---

[10]) Schärfere Kennzeichnung dieses Sachverhalts gibt Satz 12 am Schluß dieser Arbeit und die Fußnote dazu.

[11]) Vgl. jedoch für diesen Nachweis meine in Fußnote 1 erwähnte Arbeit.

[12]) A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre (Berlin 1919), S. 153 ff.; vgl. F. Bernstein, Jahresber. d. D. Math.-Verein. 28 (1919), S. 74 f.

[13]) Vgl. F. Hartogs in Math. Ann. 76 (1915), S. 438.

[14]) Für das Verhältnis der Definitionen 2, 4, 5, 6 zum Auswahlprinzip sei auf Bemerkungen in meinen in Fußnote 1 angeführten Aufsätzen und in der Fortführung der gegenwärtigen Arbeit verwiesen.

§ 1.

Das Axiomensystem.

Gegenstand der folgenden Untersuchung ist ein „Grundbereich $\mathfrak{G}$“ n Dingen, die „Kardinalzahlen“ (KZen[15])) genannt und durch kleine ıtsche Lettern bezeichnet werden sollen. Eine Forderung der Form: s gibt (es existiert) eine KZ von gewissen Eigenschaften“ besagt also, 3 eine solche KZ in $\mathfrak{G}$ vorkommen soll.

Außer dem Begriff „Kardinalzahl“ treten als primitive (nicht definierte) griffe noch zwei Verknüpfungsoperationen, „Addition“ und „Multiplition“, auf, vermittels deren unter gewissen, in den Axiomen näher angebenen Umständen aus einem Bereich $\mathfrak{B}$ von KZen je eine neue KZ vonnen wird, die auch durch $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{P}\mathfrak{B}$ bezeichnet wird. Den KZen e auch den Operationen sind keine anderen Eigenschaften beizulegen als jenigen, die sich aus den Axiomen ergeben.

Unter der *Gleichheit* wird wie üblich[16]) eine Relation zwischen je zwei ngen (KZen) verstanden, die (abgesehen von den selbstverständlichen genschaften jeder Äquivalenz) dadurch ausgezeichnet ist, daß bei der sführung der Operationen (Addition und Multiplikation) die Ersetzung iebiger KZen durch ihnen gleiche ein dem ursprünglichen Resultat iches hervorgehen läßt. Gleiche KZen (Gegensatz: verschiedene) sind o für die Zwecke der folgenden, nur auf Addition und Multiplikation fgebauten Theorie voneinander nicht verschieden; daher wird im Verlauf s vorliegenden Aufsatzes eine nähere Betrachtung gleicher KZen nicht rchgeführt, sondern der angekündigten Ergänzung vorbehalten. Da Mißrständnisse nicht zu befürchten sind, wird wie gewöhnlich durch das eichheitszeichen auch die Identität (verschiedene Schreibweise der nämhen KZ) bezeichnet, so z. B. in den Axiomen I und II; Entsprechendes t für das Zeichen $+$. Bei Wendungen wie „eine einzige KZ“, „höchstens indestens) zwei KZen“ u. dgl. werden gleiche KZen als nicht voneinander rschieden betrachtet, während „Bereich mit einem einzigen *Element*“ u. dgl. chstäblich zu nehmen ist.

Kommt in einem Bereich mehr als ein einziges Ding (Element) vor und rden von ihm mehrere Elemente gedacht, angegeben oder angeschrieben, so chieht dies zunächst in einer bestimmten Reihenfolge, von der erst vermöge es besonderen Abstraktionsaktes abgesehen wird[17]). Daher muß, wenn f einen Bereich von KZen eine Operation (Addition oder Multiplikation) gewandt wird, die Reihenfolge der KZen im Bereich beachtet werden;

[15]) „Kardinalzahl(en)“ wird im folgenden stets durch „KZ(en)“ abgekürzt.
[16]) Vgl. Loewy, a. a. O., S. 24 ff.
[17]) Vgl. Hausdorff, a. a. O., S. 32.

es besteht also von vorneherein die Möglichkeit, daß bei einer Veränderung der Reihenfolge im Bereich sich auch das Ergebnis der Operation ändert. In einer Vernachlässigung dieses Sachverhalts würden implizit sehr wesentliche stillschweigende Voraussetzungen über die Eigenschaften der Operationen liegen. Wie sich für den entgegengesetzten Standpunkt, wonach ungeordnete Bereiche das Primäre wären, das Axiomensystem verändern und zwar *vereinfachen* würde, wird unten (S. 160; vgl. auch S. 167) angegeben werden.

Ein Bereich $\mathfrak{B}$[18]) von KZen, d. h. ein Bereich, der mindestens ein Element enthält und dessen Elemente sämtlich KZen sind, wird wie üblich durch Verwendung geschweifter Klammern $\{\}$ bezeichnet, innerhalb deren die Elemente angeschrieben oder angedeutet werden. Unter den KZen eines Bereichs kann auch die nämliche KZ wiederholt vorkommen (wobei eventuell Mißverständnisse durch verschiedene Bezeichnung zu vermeiden sind). Wird auf einen Bereich eine Operation (Addition oder Multiplikation) angewandt, so werden nach dem Operationszeichen (Axiom I und VII) die geschweiften Klammern durch runde ersetzt. — Der Begriff „Teilbereich des Bereichs $\mathfrak{B}$" wird im üblichen Sinn verwendet.

Den Axiomen werden zunächst die Definitionen einiger in den Axiomen selbst auftretender Begriffe vorangeschickt, nur die Definition der Gleichheit bleibt aus äußeren Gründen bis § 3 (S. 173) zurückgestellt. In die Definitionen gehen die primitiven Begriffe der KZ, der Addition und der Multiplikation ein, die letzteren beiden mit ihren oben erwähnten Operationszeichen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{P}$ (die durch die Axiome I und VII genauer bestimmt werden).

Definition 1. *Ein Bereich $\mathfrak{B}$ von lauter verschiedenen KZen wird eine unmittelbare Menge von KZen genannt, falls eine (von $\mathfrak{B}$ abhängige) KZ $\mathfrak{m}$ von folgender Eigenschaft existiert: Zu jeder KZ $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{B}$ gibt es eine KZ $\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ von der Art, daß $\mathfrak{m} = \mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_\mathfrak{a})$.*

Nach Def. 4 und 5 in § 3 (S. 173) besagt diese Eigenschaft, daß $\mathfrak{m}$ „gleich oder größer" ist als jede KZ von $\mathfrak{B}$, also eine obere Schranke für die KZen von $\mathfrak{B}$ darstellt.

In bezug auf die Ordnung der KZen einer (unmittelbaren) Menge ist auf das zu verweisen, was oben allgemein über die Ordnung der Elemente eines Bereichs gesagt wurde.

Definition 2. *Ist $\mathfrak{B}$ ein Bereich von KZen, zu dem die Summe $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ existiert, ist ferner $\mathfrak{B}_0$ ein beliebiger (mit $\mathfrak{B}$ identischer oder nicht identischer) Teilbereich von $\mathfrak{B}$ und ist zu jeder KZ $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{B}_0$ eine (andere oder mit $\mathfrak{b}$ identische) KZ $\bar{\mathfrak{b}}$ eindeutig gegeben, so heißt der Bereich $\bar{\mathfrak{B}}_0$ aller KZen $\bar{\mathfrak{b}}$ eine mittelbare Menge von KZen*[19]).

[18]) Bereiche werden durch große deutsche Lettern bezeichnet.

[19]) Für die Zwecke des vorliegenden Aufsatzes würde übrigens auch die folgende einfachere Fassung der Def. 2 genügen: *Ist $\mathfrak{B}$ eine unmittelbare Menge von KZen*

Als Menge von KZen schlechthin wird sowohl eine unmittelbare wie auch eine mittelbare Menge bezeichnet.

Die Def. 2, die wesentlich durch die Axiome I, VII und VIII ihre volle Bedeutung erhält, erklärt den Begriff einer Menge von KZen unter gewissen Umständen auch für den Fall, daß nicht alle KZen der Menge voneinander verschieden sind. Würde man in Def. 1 das Attribut „verschiedenen" weglassen (womit Def. 2 entbehrlich würde), so erhielte man einen zu weiten, unzulässigen Mengenbegriff, z. B. Mengen, die dem „All" äquivalent sind.

Definition 3. *Eine KZ* $\mathfrak{f}$, *für die* $\mathfrak{S}(\mathfrak{f},\mathfrak{f}) \neq \mathfrak{f}$, *heißt finit, wenn es zu* $\mathfrak{f}$ *höchstens eine einzige KZ* $\mathfrak{g}$ *gibt, für die* $\mathfrak{S}(\mathfrak{g},\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}$; *eine KZ* $\mathfrak{t}$ *heißt transfinit, wenn es zu* $\mathfrak{t}$ *mindestens zwei KZen* $\mathfrak{u}$ *und* $\mathfrak{v}$ *gibt, so daß* $\mathfrak{S}(\mathfrak{u},\mathfrak{t}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{v},\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$.

Deutet man $\mathfrak{S}$ im Sinn der gewöhnlichen Addition, so läuft (bei Berücksichtigung der Nullmenge) diese Definition vollständig auf die Dedekindsche Definition der endlichen und der unendlichen Mengen hinaus; dem Umstand, daß die Existenz der KZ Null nicht vorausgesetzt (und in den Axiomen nicht explizit gefordert) wird, trägt der Zusatz „höchstens" Rechnung. Nach Def. 3 ist jede KZ entweder finit oder transfinit, ausgenommen etwaige KZen $\mathfrak{f}$, für die $\mathfrak{S}(\mathfrak{f},\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}$ ist (oder nicht existiert) und gleichzeitig die Bedingung der ersten Hälfte erfüllt ist. Die hierin liegende Sonderstellung der *Null* (als der einzigen KZ von der letzteren Art) dient der Zweckmäßigkeit der Darstellung. Will man von dieser Sonderstellung absehen, so hat man die Worte „für die $\mathfrak{S}(\mathfrak{f},\mathfrak{f}) \neq 0$" in Def. 3 fortzulassen; dann ist jede KZ entweder finit oder transfinit, und es werden leichte Modifikationen der Axiome III und IV nötig, die unten angegeben werden.

Axiom I. *Ist* $\mathfrak{M}$ *eine Menge von KZen, so geht aus* $\mathfrak{M}$ *durch Addition eine eindeutig bestimmte KZ* $\mathfrak{f} = \mathfrak{S}\mathfrak{M}$ *hervor, die als die Summe der KZen von* $\mathfrak{M}$ *bezeichnet wird. Enthält* $\mathfrak{M}$ *nur ein einziges Element, nämlich die KZ* $\mathfrak{b}$, *so ist* $\mathfrak{S}\mathfrak{M} = \mathfrak{b}$ [20]).

Axiom II. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *irgend zwei verschiedene oder nicht verschiedene KZen, von denen höchstens eine transfinit ist, und gibt es keine KZ* $\mathfrak{c}$, *für die* $\mathfrak{S}(\mathfrak{a},\mathfrak{c}) = \mathfrak{b}$ *ist, so gibt es mindestens eine KZ* $\mathfrak{d}$, *für die* $\mathfrak{S}(\mathfrak{b},\mathfrak{d}) = \mathfrak{a}$ *ist.*

Es gibt also bei gegebenem $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der bezeichneten Art mindestens entweder eine KZ $\mathfrak{c}$ oder eine KZ $\mathfrak{d}$ von den angegebenen Eigenschaften.

Ax. II stempelt jeden Bereich von zwei verschiedenen KZen zu einer unmittelbaren Menge (vgl. Fußn. [39]) und gestattet somit erst die Addition zweier KZen. Andererseits würde Ax. II ohne die Einschränkung, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht beide transfinit

und wird jede KZ von $\mathfrak{B}$ *durch eine gegebene andere ersetzt, so heißt der dadurch entstehende Bereich* $\overline{\mathfrak{B}}$ *eine mittelbare Menge von KZen.* Bei dieser Fassung wären in der Darstellung einige kleinere formelle und sachliche Änderungen (namentlich bei Ax. V) zu treffen.

[20]) Dieser Zusatz wird überflüssig, falls man die Addition nur für Bereiche von mindestens zwei Elementen zuläßt. Daß übrigens ein Bereich, dessen einziges Element eine KZ ist, eine Menge darstellt, ist nach Ax. II klar.

sein sollen, die allgemeine Vergleichbarkeit der KZen fordern (vgl. Def. 4 und 5 in § 3); um eine so weitgehende Forderung zu vermeiden, ist jene Einschränkung getroffen worden.

Axiom III. *Es gibt mindestens eine finite KZ und mindestens eine transfinite KZ.*

Ändert man Def. 3 in dem oben (S. 159) angegebenen Sinn, so hat man in Ax. III „eine finite KZ" zu ersetzen durch „zwei finite KZen" oder durch „eine finite KZ $\mathfrak{f}$, für die $\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) \neq \mathfrak{f}$".

Axiom IV. *Unter den finiten KZen gibt es mindestens eine KZ $\mathfrak{f}$ von folgender Eigenschaft: Aus $\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{b})$, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ KZen bedeuten, folgt stets $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.*

Die Subtraktion soll hiernach für mindestens *einen* finiten Subtrahenden, soweit sie überhaupt möglich ist, *eindeutig* ausführbar sein. Die Beschränkung „Unter den finiten KZen" will die (erst später als existierend festzustellende) Null ausschließen, für die die fragliche Eigenschaft offenbar trivial ist; eine transfinite KZ kann vermöge ihrer Definition (Def. 3) die obige Eigenschaft keinesfalls besitzen, sofern die Addition kommutativ ist (Ax. VI). (Bei der modifizierten Fassung von Def. 3 wäre die in Ax. IV ausgedrückte Eigenschaft von mindestens zwei KZen $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ zu fordern.) — Für die Bedeutung von Ax. IV vgl. S. 175f. und 183.

Axiom V. *Die Addition der KZen ist assoziativ.*

Für drei Summanden $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ besagt dieses assoziative Gesetz: es ist

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{S}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})) = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), \mathfrak{c}),$$

falls die hier vorkommenden Summen sämtlich existieren. Entsprechend ist die Bedeutung für Summen von beliebig (endlich oder unendlich) vielen Summanden[21]).

Axiom VI. *Die Addition der KZen ist kommutativ.*

Wer im Gegensatz zu der auf S. 157 angedeuteten Anschauung den Begriff des ungeordneten Bereichs für einfacher (ursprünglicher) ansieht als den des geordneten Bereichs, der braucht unter Bereich (Menge) nur stets einen ungeordneten Bereich (eine ungeordnete Menge) zu verstehen und das Axiom VI ganz wegzulassen.

Axiom VII. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Bereich von KZen, dessen Summe $\mathfrak{S}\mathfrak{M}$ existiert*[22]*), so geht aus $\mathfrak{M}$ durch Multiplikation eine eindeutig bestimmte KZ $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}\mathfrak{M}$ hervor, die als das Produkt der KZen von $\mathfrak{M}$ bezeichnet wird. Enthält $\mathfrak{M}$ nur einziges Element, nämlich die KZ $\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{P}\mathfrak{M} = \mathfrak{b}$.*

---

[21]) Man könnte auch in Ax. V eine Existenzforderung mit einschließen, nämlich, wenn eine Summe, in der Klammern vorkommen, vorgelegt ist, die Existenz der entsprechenden klammerfreien Summe fordern. Hierdurch würden sich gewisse Vereinfachungen ergeben (vgl. Fußnote 54, S. 186). Doch wurde von einer solchen Erweiterung des Axioms abgesehen, da sie nicht erforderlich ist.

[22]) Nach Def. 2 könnte an Stelle dieses Bedingungssatzes einfacher stehen: „Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge von KZen". Die obenstehende Fassung wurde hier vorgezogen, weil sie (im Hinblick auf Ax. VIII) eine weitergehende Unabhängigkeit zwischen den Axiomen I und VII ergibt.

Axiom VIII. *Die Multiplikation der KZen hängt mit der Addition rch das folgende distributive Gesetz zusammen:*

Es sei $\mathfrak{Z}$ *ein Bereich von KZen* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{f}_{\mathfrak{B}}$ *usw.*[23]); *jede KZ von* $\mathfrak{Z}$ *lasse h als Summe der KZen je eines gewissen Bereichs von KZen darllen, es gebe also z. B. Bereiche von KZen* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *usw., so daß* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{S}\mathfrak{A}$, $= \mathfrak{S}\mathfrak{B}$ *usw. Ferner gebe es, wenn* $\mathfrak{a}$ *eine beliebige KZ von* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ *eine iebige KZ von* $\mathfrak{B}$ *usw. ist, eine Menge* $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots\}$, *die aus jedem r Bereiche* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *usw. je eine einzige bestimmte KZ enthält*[24]); *endlich istiere zu jeder möglichen solchen Menge*[25]) *das Produkt* $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots)$ *er sämtlichen KZen. Sind all diese Voraussetzungen erfüllt und istiert das Produkt* $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}$, *so existiert auch die mittels Addition defierte KZ*

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots)) = \mathfrak{p},$$

bei über den Bereich aller möglichen Produkte $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots)$ *zu addieren , und es ist*

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}\mathfrak{Z}.$$

Dieses distributive Gesetz ist die naturgemäße Verallgemeinerung des distributen Gesetzes

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2,$$

nlich seine Ausdehnung auf den Fall, daß beliebig (endlich oder unendlich) viele ktoren auftreten, deren jeder sich als Summe beliebig vieler Summanden darstellt. treffs der Bedeutung der in Ax. VIII mit enthaltenen *Existenzforderung*, die auf und der Existenz eines Produkts die Existenz einer gewissen Summe postuliert, ist die späteren Erörterungen (vgl. namentlich S. 185) zu verweisen.

Eigentlich wäre in Ax. VIII noch zu bestimmen, in welcher Reihenfolge (etwa Grund der bekannten Anordnung der KZen von $\mathfrak{Z}$ und von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ usw.) die zu dierenden KZen von der Form $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots)$ zu nehmen sind. Eine Bestimmung dieser Richtung erweist sich jedoch als überflüssig, da nach Ax. VI die Addition mmutativ ist. Sieht man vom kommutativen Charakter der Addition ab, wie es n Nachweis der Unabhängigkeit dieser Eigenschaft von den übrigen Axiomen erderlich ist (s. u. S. 167 ff.), so ist Ax. VIII dahin zu verstehen, daß für wenigstens e Anordnung des Bereichs $\{\mathfrak{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots)\}$ die Summe $\mathfrak{p}$ existieren und gleich $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}$ n solle. — Dagegen ist die Reihenfolge der Faktoren in den Produkten der Form $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots)$ natürlich eine wohlbestimmte, nämlich die durch die Anordnung in dem reich $\mathfrak{Z}$ gegebene.

---

[23]) Natürlich soll diese Formulierung nicht etwa voraussetzen, daß $\mathfrak{Z}$ ein erstes, ites Element usw. enthalte.

[24]) Das Auswahlprinzip wird hierdurch nicht postuliert; vielmehr ist das Erfülltn der Voraussetzungen nur *Vorbedingung* für die nachfolgende Forderung.

[25]) Zwei derartige Bereiche (Mengen) sind verschieden, sobald für den einen Bereich h nur eine der individuell bestimmten KZen anders gewählt ist als für den anderen eich; die zwei fraglichen KZen brauchen hierbei nicht verschieden im Sinn von gleich" zu sein.

Zu Ax. VIII ist noch eine weitere, auf die *Unabhängigkeit des Axiomensystems* bezügliche Bemerkung zu machen. Die Freiheit, die nach der angegebenen Fassung für die Wahl je einer beliebigen additiven Zerlegung der einzelnen Faktoren $\mathfrak{f}_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{f}_{\mathfrak{B}}$ usw. gewährt ist, macht die in dem Axiom enthaltene Forderung zu einer sehr weitgehenden, zu einer weitergehenden, als an sich erforderlich wäre. Im Rahmen des ganzen Axiomensystems hat dies allerdings nichts zu sagen; denn aus der (sogleich genauer zu bezeichnenden) Forderung, auf die man Ax. VIII reduzieren kann, läßt sich die volle Aussage dieses Axioms mittels der übrigen Axiome unmittelbar folgern. Aber wenn es schon an sich Grundsatz jeder Axiomatik sein muß, die einzelnen Axiome so eng wie möglich zu fassen, so kommt diesem Grundsatz noch eine besondere Bedeutung zu im Hinblick auf die Unabhängigkeit jedes einzelnen Axioms von der Gesamtheit aller übrigen. In der vorstehenden Fassung des Axioms VIII scheinen nun in der Tat die Axiome V und VI, das assoziative und das kommutative Gesetz der Addition, wenigstens teilweise mit enthalten zu sein. In dieser Hinsicht ist besonders hervorzuheben, daß den Axiomen I—V, VII, IX, X auch der *Bereich aller Cantorschen Ordinalzahlen* (bei der hierfür üblichen Definition der Addition und Multiplikation) genügt[26]; in diesem System ist bekanntlich die Addition nicht kommutativ, d. h. Ax. VI sicher nicht erfüllt. Aber auch Ax. VIII kann in der vorstehenden Fassung, die den Gesetzen der Addition weitgehende Bedingungen auferlegt, im Bereich der Ordinalzahlen nicht befriedigt werden. Hingegen läßt sich, wie das unten angeführte System $\mathfrak{G}_{VI}^{(A)}$ (S. 167 f.) zeigt, die Multiplikation der Ordinalzahlen (bei entsprechender Modifikation der Def. 1) so erklären[27], daß das System der Ordinalzahlen auch noch der *reduzierten* Fassung von Ax. VIII, also allen Axiomen mit Ausnahme des kommutativen Gesetzes der Addition genügt, was offenbar zugunsten der getroffenen Wahl der Axiome spricht.

Die vorstehende, überflüssig weite Fassung des Axioms VIII wurde nur deshalb nicht von vorneherein durch die nachfolgende engere ersetzt, um die Formulierung des Axioms nicht allzu umständlich werden zu lassen und um seinen einfachen Charakter — die Verallgemeinerung des distributiven Gesetzes — nicht zu verwischen durch Einschränkungen, die im Rahmen des ganzen Axiomensystems ohne Bedeutung sind und nur für den Unabhängigkeitsbeweis eine Rolle spielen.

Um zu der engeren Fassung von Ax. VIII zu gelangen, verstehe man unter einer vollständigen additiven Zerlegung der KZ $\mathfrak{f}$ eine Darstellung von $\mathfrak{f}$ als Summe über eine Menge $\mathfrak{A}$ von KZ ($\mathfrak{f} = \mathfrak{S}\mathfrak{A}$) von folgender Art: *die Darstellung* $\mathfrak{f} = \mathfrak{S}\mathfrak{A}$ *ist nach Möglichkeit so beschaffen, daß keine KZ* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{A}$ (*d. h. kein Summand von* $\mathfrak{S}\mathfrak{A}$) *sich als Summe aus lauter von* $\mathfrak{a}$ *verschiedenen KZen darstellen läßt.* Die Einschränkung „nach Möglichkeit" trägt hierbei dem Umstand Rechnung, daß, falls man vom assoziativen Gesetz der Addition (Ax. V) absieht, die angegebene Eigenschaft sich nicht notwendig *ganz* realisieren läßt (siehe $\mathfrak{G}_V$, S. 166 f.).

---

[26]) Betreffs Ax. I (und VII) vgl. S. 167 f.

[27]) Unverändert kann sich die Multiplikation der Ordnungszahlen keinesfalls dem Multiplikationsgesetz der KZen fügen, ob dieses nun in Ax. VIII oder in anderer Form zum Ausdruck komme. Denn bekanntlich kann die zu einer wohlgeordneten Menge wohlgeordneter Mengen gehörige (ungeordnete) Verbindungsmenge (Komplexmenge) im allgemeinen überhaupt nicht in der hierfür in Betracht kommenden Weise (wohl)geordnet werden, weshalb man unter dem Produkt wohlgeordneter Mengen nur eine geordnete *Teilmenge* jener Verbindungsmenge zu verstehen pflegt. Vgl. S. 168.

Es soll nun, soweit vollständige additive Zerlegungen überhaupt vorhanden sind[28]*, e Forderung des Ax. VIII nur dann in Frage kommen, wenn die in ihm voraus-setzten Darstellungen* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{S}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{f}_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{S}\mathfrak{B}$ *usw. vollständige additive Zerlegungen der Zen* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{f}_{\mathfrak{B}}$ *usw. sind.*

Nach Def. 5 in § 3 (S. 173) ist eine vollständige Zerlegung $\mathfrak{f} = \mathfrak{S}\mathfrak{A}$ eine solche, ei der die KZen von $\mathfrak{A}$ sämtlich möglichst klein sind (d. h. auf Grund der schließ-hen Ergebnisse: bei der $\mathfrak{A}$ nur Nullen und Einsen enthält). Nur für solche Zer-gungen soll Ax. VIII erfüllt sein. Natürlich ist diese Forderung in der ursprüng-hen Fassung des Axioms mit eingeschlossen; aber man erkennt auch unmittelbar, aß die Verwendung des assoziativen und des kommutativen Gesetzes der Addition is der jetzigen engeren Fassung des Axioms sofort die ursprüngliche weitere her-rgehen läßt[29]).

Axiom IX. *Es gibt mindestens eine multiplikativ neutrale KZ* e, *. h. eine KZ* e *von folgender Eigenschaft: Ist* $\mathfrak{B}$ *ein Bereich von KZen, ir den das Produkt* $\mathfrak{P}\mathfrak{B}$ *existiert, und wird aus* $\mathfrak{B}$ *ein Teilbereich* $\mathfrak{B}_0$ *n der Weise gebildet, daß aus* $\mathfrak{B}$ *lauter*[30]) *KZen, die gleich* e *sind, fort-elassen werden, so ist* $\mathfrak{P}\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{P}\mathfrak{B}$.

Axiom X. *Es gibt keine KZen außer den auf Grund der Axiome I—IX xistierenden.*

Schärfer ausgedrückt: *Enthält der Grundbereich* $\mathfrak{G}$ *einen kleinsten*[31]) *eilbereich* $\mathfrak{G}_0$, *der die Axiome I—IX befriedigt, so ist* $\mathfrak{G}$ *mit einem olchen kleinsten Teilbereich* $\mathfrak{G}_0$ *identisch.*

Dieses Axiom ist das Gegenstück zu dem von Herrn Hilbert zur xiomatischen Begründung der Geometrie und der Lehre von den reellen ahlen herangezogenen *Vollständigkeitsaxiom*[32]). Wird durch dieses die ußerste Ausdehnung des zu begründenden Bereichs gefordert, die noch it den Axiomen verträglich ist, so wird umgekehrt durch Axiom X dem rundbereich $\mathfrak{G}$ die größtmögliche Beschränkung auferlegt, die sich mit en Axiomen vereinen läßt; Axiom X kann demgemäß als Beschränkt-eitsaxiom bezeichnet werden. Es werde ausdrücklich hervorgehoben, daß

---

[28]) Man braucht hiernach, um Ax. VIII anzuwenden, nicht etwa erst nach voll-ändigen additiven Zerlegungen zu suchen, sondern kann sogleich wie am Ende des ächsten Absatzes schließen.

[29]) Zu diesem Zweck braucht man nur die KZen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ usw. je (durch lammern) in Gruppen einzuteilen, innerhalb dieser zu addieren und die Summe ler möglichen aus diesen Teilsummen durch Multiplikation im Sinne von Ax. VIII ervorgehenden Produkte zu vergleichen mit der durch direkte Anwendung von x. VIII entstehenden Summe.

[30]) Nicht notwendig *alle*.

[31]) Wie üblich ist unter einem *kleinsten* Teilbereich von der angegebenen Eigen-haft ein Bereich zu verstehen, der *Durchschnitt* aller Teilbereiche von $\mathfrak{G}$ mit der aglichen Eigenschaft ist und auch seinerseits die Eigenschaft besitzt.

[32]) Vgl. Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl. (Leipzig u. Berlin 1909), S. 22 ff.; ahresber. d. D. Math.-Verein. 8 (1900), S. 180—184.

Axiom X nichts über die Art der Operationen (Addition und Multiplikation) aussagt; diese können, wenn nur im Einklang mit den Axiomen, von ganz beliebiger Natur sein, nicht etwa nur so, daß dadurch der Grundbereich möglichst beschränkt wird.

§ 2.

Die Unabhängigkeit der Axiome.

In üblicher Weise soll im folgenden die Unabhängigkeit eines jeden der 10 Axiome von der Gesamtheit der 9 übrigen nachgewiesen werden durch Angabe je eines widerspruchslosen Bereiches $\mathfrak{G}_k$ ($k = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, \mathrm{X}$) von KZen, in dem das Axiom k *nicht* erfüllt ist, wohl aber die 9 Axiome i für $i \neq k$. Die Axiome sind an sich so gewählt, daß sie *einfache* Forderungen enthalten; doch sind die im folgenden angegebenen Bereiche $\mathfrak{G}_k$ auch ihrerseits nach Möglichkeit so konstruiert, daß aus ihnen erhellt, wie die einzelnen Axiome nicht nur nicht *völlig entbehrt*, sondern auch nicht in wesentlichen Punkten ihres Aussageninhalts *reduziert* werden können.

Bei der Konstruktion der Bereiche $\mathfrak{G}_k$ wird meist an das System der gewöhnlichen (Cantorschen) KZen oder Mächtigkeiten angeknüpft; diese werden in üblicher Weise bezeichnet, so daß z. B. mit $\{0, 1, 2, \ldots \aleph_0\}$ ein Bereich gekennzeichnet wird, der außer der unendlichen KZ $\aleph_0$ noch sämtliche endlichen KZen (einschl. 0) enthält. Ebenso werden statt $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{P}$ die gewöhnlichen Zeichen $+$ und $\cdot$ benutzt. Zum Unterschied gegen die in Def. 3 (S. 159) eingeführten Bezeichnungen werden für die gewöhnlichen KZen statt „finit“ und „transfinit“ die Ausdrücke „endlich“ und „unendlich“ gebraucht, wobei auch 0 als endliche KZ gilt.

Zu Axiom I. Es sei $\mathfrak{G}_I = \{0, 1, 2, \ldots \aleph_0\}$; dabei sollen Addition und Multiplikation *endlich vieler* (verschiedener oder gleicher) KZen von $\mathfrak{G}_I$ möglich und in der gewöhnlichen Art ausführbar sein, nicht aber die Addition oder Multiplikation unendlich vieler KZen. Da für jedes Element $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{G}_I$ stets $\mathfrak{a} + \aleph_0 = \aleph_0$ ist, so ist $\mathfrak{G}_I$ selbst und jeder Teilbereich davon nach Def. 1 eine unmittelbare Menge; daher ist Axiom I nicht erfüllt. Wohl aber werden alle übrigen Axiome befriedigt: $\aleph_0$ ist (die einzige) transfinite KZ; dem Axiom IV genügt jede von $\aleph_0$ verschiedene KZ $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{G}_I$.

Zu Axiom II. Die Unabhängigkeit des Axioms II zeigt vor allem der Bereich, der aus dem Bereich der gewöhnlichen KZen durch *Weglassung der Null* (bei Beibehaltung aller Rechenregeln) entsteht. In gewissem Sinn — wenn man nämlich, bei Beschränkung des Mengenbegriffs auf Bereiche mit einem einzigen Element, Axiom III im Hinblick auf Def. 3 als gegenstandslos betrachten will — genügt ein Grundbereich mit einem

zigen Element, das KZ genannt wird und seine eigene Summe wie auch n eigenes Produkt darstellt, allen Axiomen außer Axiom II.

In weitergehender Weise überzeugt man sich von der Unabhängigkeit s Axioms auf folgendem Weg. $\mathfrak{G}_{II}$ sei der nachstehende Bereich von tereinander verschiedenen KZen: $\{0, 1, 2, \ldots \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots\}$. bei sei $\omega+0=\omega$, $\omega+\omega=\omega$, $\omega\cdot 0=0$, $\omega\cdot\omega=\omega$; im übrigen len die gewöhnlichen Rechenregeln und die assoziativen, kommutativen d distributiven Gesetze gelten. So ist z. B. $(\omega+4)+(\omega+2)=\omega+6$, $+3)\cdot(\omega+5)=\omega+15$. Nur die Bereiche von *endlich* vielen KZen llen in $\mathfrak{G}_{II}$ Mengen dar; nur über solche kann addiert oder multipliziert rden. Die KZen $1, 2, \ldots$ sind finit und genügen dem Axiom IV, alle rigen außer 0 sind transfinit; denn es ist z. B. $\omega+0=\omega+\omega=\omega$. ch alle übrigen Axiome sind in $\mathfrak{G}_{II}$ erfüllt, nur nicht Axiom II; ist mlich k irgendeine der KZen $1, 2, \ldots$, so gibt es in $\mathfrak{G}_{II}$ weder eine Z $\mathfrak{x}$, für die $k+\mathfrak{x}=\omega$, noch eine KZ $\mathfrak{y}$, für die $\omega+\mathfrak{y}=k$.

Zu Axiom III. Die Unabhängigkeit soll für jede der beiden in xiom III enthaltenen Forderungen einzeln gezeigt werden.

A. Die Unabhängigkeit der Forderung einer finiten KZ beweist schon r Bereich, der nur die beiden KZen 0 und $\aleph_0$ enthält und in dem mit esen wie üblich gerechnet wird. $\aleph_0$ ist transfinit und gleichzeitig multiikativ neutral (Axiom IX); addieren oder multiplizieren darf man auf rund von Axiom I (und VII) zunächst nur eine oder zwei KZen, aber f Grund von Axiom VIII (und VII) auch deren endlich viele[33]). Dagen ist weder 0 noch $\aleph_0$ finit[34]); damit wird Axiom IV gegenstandslos. — ieser Bereich bleibt für den gewünschten Zweck auch noch brauchbar, enn man $0\cdot\aleph_0=\aleph_0$ setzt (etwa $\aleph_0$ und $\aleph_1$ statt 0 und $\aleph_0$ schreibt); nn ist 0 multiplikativ neutral.

Die sehr spezielle Natur der soeben angegebenen Bereiche legt die age nahe, ob nicht bei einer Modifikation des zweiten Teiles von Axiom III, ch ohne die Forderung einer finiten KZ, sich die Existenz einer solchen n selbst ergibt. Dem gegenüber soll noch ein Bereich $\mathfrak{G}_{III}^{(A)}$ angegeben erden, der sogar *unendlich viele verschiedene transfinite KZen* enthält, er keine endliche KZ. Naturgemäß wird dieser Bereich (zwar alle anderen xiome, aber) nicht Axiom X (das Beschränktheitsaxiom) befriedigen können.

---

[33]) Z. B. existiert, da nach Axiom I und VII $\aleph_0\cdot\aleph_0=(\aleph_0+0)(\aleph_0+\aleph_0)$ existiert, ch Axiom VIII auch die diesem Produkt gleiche Summe $\aleph_0\cdot\aleph_0+\aleph_0\cdot\aleph_0+0\cdot\aleph_0+0\cdot\aleph_0$ $\aleph_0+\aleph_0+0+0$; entsprechend ist (unter Benutzung der Def. 2) weiter zu schließen.

[34]) Wollte man auch die Null als finit betrachten (vgl. S. 159), so zeigte dieser e auch der im folgenden angeführte Bereich, daß es erforderlich ist, *mindetens zwei ite KZen* (neben einer transfiniten) in Ax. III zu postulieren; vgl. S. 160.

da jeder Bereich dieser Art den soeben angegebenen als Teilbereich enthält, wie man unmittelbar einsieht[35]).

$\mathfrak{G}_{III}^{(A)}$ umfasse außer 0 noch alle unendlichen KZen (Mächtigkeiten) der gewöhnlichen Mengenlehre, und unter Addition und Multiplikation seien die üblichen Operationen zu verstehen. Der Mengenbegriff erweist sich auf Grund von Def. 1, Axiom I und VIII und Def. 2 als der gewöhnliche (vgl. §§ 3 und 4). Das neutrale Element der Multiplikation ist $\aleph_0$. Alle KZen von $\mathfrak{G}_{III}^{(A)}$, ausgenommen 0, sind transfinit; denn ist $\mathfrak{a}$ eine solche, so ist z. B. $\mathfrak{a} + 0 = \mathfrak{a} + \aleph_0 = \mathfrak{a}$. Dagegen enthält $\mathfrak{G}_{III}^{(A)}$ keine finite KZ.

B. Die Unabhängigkeit der Forderung einer transfiniten KZ zeigt der Bereich $\mathfrak{G}_{III}^{(B)}$ aller endlichen KZen (d. h. der natürlichen Zahlen) einschließlich 0, wenn Addition und Multiplikation die üblichen Operationen sind. Nach Def. 1 und 2 sind dann nur Bereiche von *endlich vielen* (verschiedenen oder nicht verschiedenen) KZen als Mengen zu betrachten, da es zu unendlich vielen verschiedenen KZen keine obere Schranke in $\mathfrak{G}_{III}^{(B)}$ gibt; die demnach in den Axiomen I und VII liegende Beschränkung, wonach nur Summen und Produkte von endlich vielen KZen gebildet werden können, wird in diesem Fall auch durch Axiom VIII nicht aufgehoben.

Zu Axiom IV. $\mathfrak{G}_{IV}$ enthalte, wenn n eine beliebige natürliche Zahl bedeutet, die $n+2$ verschiedenen KZen $0, 1, 2, \ldots, n, \aleph_0$; für die Operationen sollen folgende Regeln gelten:

$$n + 1 = \aleph_0, \quad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0,$$

während Addition und Multiplikation in üblicher Weise auszuführen sind, soweit die dabei entstehenden Summen und Produkte $\leqq n$ sind. Alle weiteren Regeln der Addition und Multiplikation folgen aus den angeführten mittels des assoziativen und des kommutativen Gesetzes der Addition (Axiome V und VI) und des distributiven Gesetzes (Axiom VIII); z. B. ist $n + 2 = n \cdot 2 = \aleph_0$; insbesondere erweist sich auch die Multiplikation als assoziativ und kommutativ. Gemäß Def. 1 und 2 und Axiomen I, VII, VIII sind nur Summen und Produkte von endlich vielen KZen zulässig. Die KZen $1, \ldots, n$ und nur sie sind finit; dennoch ist, wenn $\mathfrak{f}$ eine beliebige unter ihnen bedeutet, $\mathfrak{f} + n = \mathfrak{f} + \aleph_0 = \aleph_0$ im Widerspruch mit Axiom IV.

Zu Axiom V. Es sei $\mathfrak{G}_V = \{0, 1, 2, \ldots \aleph_0\}$. Was die Operationen betrifft, so sollen Summen von lauter endlichen KZen, in denen mehr als *zwei* von 0 verschiedene Summanden vorkommen, gleich 0 sein, ebenso auch Produkte von lauter endlichen KZen, in denen mehr als *ein* von 1

[35]) Es läßt sich übrigens auch ein — allerdings wesentlich komplizierterer — Bereich angeben, in dem es unter den transfiniten KZen *keine kleinste* gibt, während keine finite KZ existiert und die übrigen Axiome erfüllt sind.

rschiedener Faktor auftritt; Summen bzw. Produkte, in denen $\aleph_0$ als ummand bzw. Faktor vorkommt, sollen stets gleich $\aleph_0$ sein (auch wenn als Faktor auftritt); im übrigen sollen die gewöhnlichen Rechenregeln lten. Nach Def. 2 ist (wegen $\mathfrak{a} + \aleph_0 = \aleph_0$, $\mathfrak{a}$ beliebige KZ) offenbar $_V$ selbst eine unmittelbare Menge, so daß auf Grund von Def. 2 und x. I und VII zunächst beliebige Summen und Produkte von abzählbar elen Gliedern gebildet werden können; auf Grund von Ax. VIII (und VII) nd dann, da sich z. B. 0 als Summe unendlich vieler KZen darstellen ßt, auch Summen (und Produkte) von nichtabzählbar unendlich vielen liedern zu bilden. Jede von 0 und $\aleph_0$ verschiedene KZ ist finit und nügt dem Ax. IV. Nach Definition ist die Addition kommutativ. Was s distributive Gesetz (Ax. VIII) betrifft, so werde zunächst ein von 0 rschiedenes Produkt ins Auge gefaßt, das den Faktor $\aleph_0$ nicht enthält; ihm ist höchstens *ein* Faktor $\mathfrak{f}_{\mathfrak{A}} = 1$, ferner $\mathfrak{f}_{\mathfrak{A}} = 0$, es kommen also jeder additiven Zerlegung von $\mathfrak{f}_{\mathfrak{A}}$ höchstens zwei von 0 verschiedene ummanden vor; demnach ist für diesen Fall die gegebene Multiikationsregel im Einklang mit (sogar der weiteren Fassung von) Ax. VIII. t zweitens das betrachtete Produkt gleich 0, d. h. kommt unter seinen aktoren nicht $\aleph_0$ vor, hingegen entweder 0 oder mehrere von 0 und 1 rschiedene endliche KZen, so ist nach der engeren Fassung von Ax. VIII . 163) bei der Anwendung des distributiven Gesetzes sowohl 0 wie auch de andere endliche von 1 verschiedene KZ als Summe von mehreren nindestens drei bzw. genau zwei) zu 0 ungleichen Summanden darzustellen, nter denen alle bzw. mindestens einer gleich 1 ist; es ergibt sich daher nach x. VIII schließlich eine Summe mit mindestens drei endlichen von 0 verhiedenen Summanden, die nach den Additionsregeln wirklich = 0 ist. Tritt ndlich $\aleph_0$ als Faktor in dem zu untersuchenden Produkt auf, so ergibt sich ei jeder additiven Zerlegung der einzelnen Faktoren schließlich eine umme, in der mindestens ein Summand sich als ein Produkt mit dem aktor $\aleph_0$ darstellt, das seinerseits gleich $\aleph_0$ ist; nach den Additionsregeln ist nn auch die ganze Summe gleich $\aleph_0$. Daß auch die Axiome I, II, VII, , X erfüllt sind, erkennt man unmittelbar. Dagegen ist die Addition $\mathfrak{G}_V$ nicht assoziativ; z. B. ist $(1+1)+1=3$, aber $1+1+1=0$.

Zu Axiom VI. A. $\mathfrak{G}_{VI}^{(A)}$ sei die Gesamtheit aller (endlichen und nendlichen) Ordinalzahlen im üblichen Sinn. Bei Definition der Opetionen sei folgende Bemerkung vorausgeschickt: Der Nachweis der Unbhängigkeit des kommutativen Gesetzes der Addition, der durch $\mathfrak{G}_{VI}$ bracht werden soll, hat nur dann einen Sinn, wenn unter „Bereich von Zen" ein *geordneter* Bereich von KZen verstanden wird (vgl. oben S. 157 f.); nn andernfalls ist die Addition schon auf Grund von Ax. I kommutativ. Um n zum Unabhängigkeitsbeweis von Ax. VI den Bereich der Ordinalzahlen

verwenden zu können, ist es erforderlich, die Def. 1, in der „Bereich" nach dem soeben Bemerkten „geordneter Bereich" bedeutet, dadurch noch enger zu fassen, daß man dafür „*wohlgeordneter Bereich*" einsetzt. Eine solche Einschränkung würde übrigens bei Voraussetzung des Wohlordnungssatzes für die ganze vorliegende Arbeit zulässig sein; denn alle in ihr vorkommenden *geordneten* Mengen sind wohlgeordnet. Man kann aber auch, von der so eingeschränkten Def. 1 ausgehend, diese Einschränkung wieder fortschaffen; man braucht zu diesem Zwecke nur (in dem in Fußnote 21, S. 160, angegebenen Sinn) Ax. VI als eine Existenzforderung mitenthaltend aufzufassen: bei einer Veränderung der Reihenfolge der Summanden soll auch *die neue Summe existieren* und der ursprünglichen gleich sein. Auf das sich so ergebende, als Ganzes mit dem ursprünglichen übereinstimmende Axiomensystem trifft der folgende Unabhängigkeitsbeweis buchstäblich zu. In § 1 wurde von einer solchen Formulierung des Axiomensystems Abstand genommen, weil dieses damit an Einfachheit verloren hätte. Ein Bereich, der auch bei Verzicht auf jede Änderung des Axiomensystems die Unabhängigkeit von Ax. VI dartut, wird nachstehend unter B. angegeben.

Unter Festlegung der angeführten Beschränkung in bezug auf den Begriff „Bereich" soll die Addition der Ordinalzahlen in $\mathfrak{G}_{VI}^{(A)}$ wie gewöhnlich ausgeführt werden. Dagegen werde die Multiplikation wegen der Verschiedenheit der üblichen Produktdefinition für ungeordnete und für geordnete Mengen (vgl. Fußnote 27 a. S. 162) abweichend von der gewöhnlichen Art, und zwar unter Benutzung des Wohlordnungssatzes, erklärt: Ist ein Produkt von Ordinalzahlen vorgelegt, so ersetze man jede Ordinalzahl durch die ihr zugehörige KZ (d. h. durch die KZ, deren Zahlenklasse sie angehört), bilde das Produkt $\mathfrak{p}$ der erhaltenen KZen und bezeichne die Anfangszahl der Zahlenklasse $Z(\mathfrak{p})$ (d. h. die kleinste Ordinalzahl von der Mächtigkeit $\mathfrak{p}$) mit π; dann soll π das vorgelegte Produkt von Ordinalzahlen darstellen[36]). Die einzige Ausnahme von dieser Regel soll der Fall bilden, daß nur *ein* Faktor des Produkts von 1 verschieden ist; in diesem Fall soll das Produkt gleich jenem Faktor sein. Hiernach ist z. B.

$$\omega \cdot 1 = 1 \cdot \omega = \omega, \qquad \omega \cdot 2 = 2 \cdot \omega = \omega + \omega, \qquad \omega \cdot \omega = \omega + \omega + \omega + \omega + \dots .$$

[36]) Da ein Produkt von Ordinalzahlen mit wohlgeordnetem *Argument* ein sogenanntes Vollprodukt mit der *entsprechenden* Mächtigkeit darstellt (vgl. F. Hausdorff, Grundz. d. Mengenlehre, S. 150f.), so läßt sich die obige Definition auch so ausdrücken: Um das Produkt einer wohlgeordneten Menge $\mathfrak{Z}$ von Ordinalzahlen zu bilden, berechne man das mit dem *Argument* $\mathfrak{Z}$ genommene Produkt, das einen (im allgemeinen nicht wohlgeordneten) Ordnungstypus π darstellt; hat π die Mächtigkeit $\mathfrak{p}$, so sei $\aleph\mathfrak{Z}$ die Anfangszahl der Zahlenklasse $Z(\mathfrak{p})$.

Auf Grund dieser Festsetzungen ist jede wohlgeordnete Menge von dinalzahlen — dies im gewöhnlichen Sinn verstanden — auch eine Menge Sinn der Definitionen 1 und 2. Die Axiome I, II, V, VII und IX eses mit $\mathfrak{e} = 1$) sind ersichtlich erfüllt; alle unendlichen Ordinalzahlen d nur sie sind transfinit, die in Ax. IV bezeichnete Eigenschaft kommt *ler* Ordinalzahl $\mathfrak{f}$ zu. Was das distributive Gesetz (Ax. VIII) betrifft, ist jede additive Zerlegung einer Ordinalzahl, bei der als Summanden r Einsen und Nullen auftreten, und *nur* eine derartige Zerlegung eine llständige additive Zerlegung (S. 162); bedeutet $\mathfrak{Z}$ eine wohlgeordnete nge von Ordinalzahlen und wird für jede Ordinalzahl von $\mathfrak{Z}$ eine voll- ndige additive Zerlegung gewählt, so erhält man durch Anwendung des Ax. VIII angegebenen Prozesses eine (ungeordnete) Summe, die als mmanden (außer Nullen) nur Einsen enthält, und zwar ist die Mächtig- it der Menge aller als Summanden auftretenden Einsen gleich der Mäch- keit $\mathfrak{p}$ der Ordinalzahl π, die nach der oben angegebenen Multiplikations- el das Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}$ darstellt; die Ordnung der Summanden in der altenen Summe läßt sich daher (und zwar als Wohlordnung) so fest- zen, daß die Summe auf Grund der Definition der Addition gleich π rd. Was endlich das Beschränktheitsaxiom X betrifft, so genügt wirklich in echter Teilbereich von $\mathfrak{G}_{VI}^{(A)}$ allen Axiomen I—V, VII—IX; der Beweis entsprechend wie in § 4 (S. 187) zu führen. Insbesondere folgt aus . VII die Existenz der Ordinalzahlen $2^{\omega} = \omega_1$, $2^{\omega_1} = \omega_2$ usw., die im gensatz zu den so bezeichneten Zahlen der gewöhnlichen Mengenlehre Mächtigkeiten $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{f}$ usw. besitzen. Da die Addition in $^{A)}_{I}$ ersichtlich nicht kommutativ ist, so genügt dieser Bereich allen iomen mit Ausnahme von Ax. VI.

B. Die Unabhängigkeit von Ax. VI läßt sich, ohne daß (wie vor- hend) das Axiomensystem auch nur formal modifiziert wird, folgender- ßen nachweisen. Es sei $\mathfrak{G}_{VI}^{(B)} = \{0, 1, 2, \ldots \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots \omega+\omega\}$. Geordnete) Menge" (vgl. S. 167 unten) habe den üblichen Sinn. Summen, bei der gewöhnlichen Addition von Ordinalzahlen eine der Zahlen von $^{B)}_{I}$ ergeben, falls man unter ω die Ordinalzahl der abgezählten Mengen steht, sollen die übliche Bedeutung haben; jede andere Summe habe Wert $\omega + \omega$. Produkte, die bei der üblichen Multiplikation eine l von $\mathfrak{G}_{VI}^{(B)}$ liefern, sollen dann und nur dann diese gewöhnliche Be- tung haben, wenn das Produkt der entsprechenden *Mächtigkeiten* nicht ßer ist als $\aleph_0$; in jedem anderen Fall ist das Produkt gleich $\omega + \omega$ setzen. Es ist also z. B. $2 \cdot \omega = \omega$, $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots = \omega + \omega$. it sind hiernach die Zahlen $1, 2, \ldots$ und nur sie. Die Axiome I—V, , IX, X sind, wie man unmittelbar sieht, erfüllt. Aber auch Ax. VIII befriedigt. Denn eine vollständige additive Zerlegung einer Zahl α

aus $\mathfrak{G}_{VI}^{(B)}$ ist eine solche, die α als Summe von lauter Einsen (und ev Nullen) darstellt; ist also das betrachtete Produkt nicht etwa endlich (so daß Ax. VIII sicherlich erfüllt ist), so erhält man, falls das Produk der den Faktoren entsprechenden Mächtigkeiten gleich $\aleph_0$ ist, in de Summendarstellung eine abzählbare Summe von Einsen, die so geordne werden kann, daß sie gleich dem definierten Produktwerte wird; ist abe das Produkt der entsprechenden Mächtigkeiten größer als $\aleph_0$, so wird so wohl die Summe (eine nichtabzählbar unendliche Menge von Einsen) wi das Produkt gleich $\omega + \omega$. Die Addition ist nicht kommutativ, da z. B $\omega + 1 \neq 1 + \omega$. Alle Axiome außer Ax. VI sind also erfüllt.

Zu Axiom VII. Es sei $\mathfrak{G}_{VII} = \{0, 1, 2, \ldots \aleph_0\}$. Addition und Multi plikation seien wie gewöhnlich definiert, doch sei die Multiplikation nu für endlich viele Faktoren ausführbar[37]). Dann gelangt man niemals übe die KZ $\aleph_0$ hinaus. Alle Axiome, auch Ax. X, sind erfüllt, nur nicht Ax. VII denn z. B. $\{1, 2, 3, \ldots\}$ ist eine unmittelbare Menge, über die addiert aber nicht multipliziert werden kann.

Zu Axiom VIII. Es sei $\mathfrak{G}_{VIII} = \{0, 1, 2, \ldots \aleph_0\}$ mit den gewöhnliche Additionsregeln. Die Multiplikation werde für Produkte, in denen höchsten *ein* Faktor von 1 verschieden ist, wie üblich ausgeführt; alle andere Produkte seien gleich Null. Alle Axiome außer Ax. VIII sind erfüllt.

Zu Axiom IX. $\mathfrak{G}_{IX}$ enthalte die Null und die unendlichen KZen de gewöhnlichen Mengenlehre, von den endlichen KZen aber nur die *gerade* 2, 4, 6 usw. Die Axiome I—VIII sind offensichtlich erfüllt. Aber auc mit Ax. X ist $\mathfrak{G}_{IX}$ im Einklang. Denn $\mathfrak{G}_{IX}$ enthält zwar echte Teil bereiche, die ebenso wie $\mathfrak{G}_{IX}$ selbst die Axiome I—VIII befriedigen, näm lich die Teilbereiche, die aus $\mathfrak{G}_{VI}$ mittels Ersetzung der KZen 2, 4, 6, .. durch $2n$, $4n$, $6n$, ... hervorgehen, wo n eine beliebige natürliche Zah bedeutet; aber es gibt unter all diesen Teilbereichen keinen *kleinsten*, denn ihr Durchschnitt enthält keine finite KZ, genügt also nicht dem Ax. III $\mathfrak{G}_{IX}$ erfüllt also alle Axiome außer Ax. IX.

Zu Axiom X. A. $\mathfrak{G}_{X}^{(A)}$ enthalte außer den KZen der gewöhnliche Mengenlehre, die wie üblich addiert und multipliziert werden, noch ein weitere KZ ∞, die als transfinit und kleiner als $\aleph_0$ gelten soll. Es solle demgemäß die folgenden Rechenregeln bestehen, in denen n eine beliebig von 0 verschiedene endliche, $\aleph$ eine beliebige von ∞ verschiedene unend liche KZ bedeutet und $\mathfrak{c}$ die Mächtigkeit des Kontinuums bezeichnet:

---

[37]) Auch die Festsetzung, daß eine Multiplikation überhaupt nicht ausführba sein soll (wodurch die Axiome VIII und IX gegenstandslos werden), würde den ge wünschten Zweck erfüllen.

$$\infty + 0 = \infty + n = \infty + \infty = \infty, \quad \aleph + \infty = \aleph,$$
$$\infty \cdot 0 = 0, \quad \infty \cdot n = \infty \cdot \infty = \infty, \quad \aleph \cdot \infty = \aleph, \quad \infty^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Verbindung mit den assoziativen, kommutativen und distributiven esetzen, die in $\mathfrak{G}_X^{(A)}$ gelten sollen, sind hiermit die Rechenregeln voll- mmen festgelegt. Eine vollständige additive Zerlegung (S. 162) außer der vialen $\infty + 1 = \infty$ läßt ∞ nicht zu, m. a. W.: ∞ stellt keine *Anzahl* r; daher kommt ∞ als Exponent nicht in Frage. $\mathfrak{G}_X^{(A)}$ befriedigt alle iome bis auf Ax. X.

B. Zur Illustration einiger abstrakter Betrachtungen des § 4 (vgl. S. 180) rde noch ein zweiter Bereich $\mathfrak{G}_X^{(B)}$ konstruiert, der gleichfalls den iomen I—IX genügt, nicht aber dem Ax. X. In $\mathfrak{G}_X^{(B)}$ treten zu den wöhnlichen KZen nicht wie vorher weitere *unendlich große*, sondern *endlich kleine* (in bezug auf 1 nichtarchimedische) Zahlen. (Daß das iomensystem nicht die Hinzufügung weiterer endlicher Zahlen, z. B. von üchen, zu den natürlichen Zahlen gestattet, läßt sich durch tieferliegende trachtungen einsehen, die aus § 4 [S. 182 f.] unschwer zu entnehmen sind.) $\mathfrak{G}_X^{(B)}$ enthalte außer den gewöhnlichen, in üblicher Weise zu ver- üpfenden KZen eine weitere KZ ε, ferner deren Vielfache $2\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon$, $= 2\varepsilon + \varepsilon$ usw., die alle untereinander sowie von ε verschieden sein llen. Ferner existiere die Summe all dieser KZen $\varepsilon + 2\varepsilon + 3\varepsilon + \ldots$; sei mit η bezeichnet. Weiter gelte:

$$1 + \varepsilon = 1 + \eta = 1, \quad \varepsilon \cdot \varepsilon = 0.$$

dlich soll jede Summe, die unendlich viele von 0 verschiedene Sum- nden, darunter aber keine endliche oder unendliche KZ der gewöhnlichen engenlehre aufweist, den Wert η besitzen. Fordert man noch die Gültig- it der assoziativen, kommutativen und distributiven Gesetze, so sind e Rechenregeln festgelegt; insbesondere folgt

$$\eta + \varepsilon = \eta + \eta = \eta, \quad \eta \cdot \eta = \Big[\sum_k k\varepsilon\Big]^2 = \aleph_0(\varepsilon^2) = 0.$$

e KZ ε und ihre Vielfachen 2ε, 3ε, ... sind finit und genügen dem iom IV, während η und alle von 0 verschiedenen gewöhnlichen (end- nen und unendlichen) KZen im Sinne der Def. 3 transfinit sind. Auch $\mathfrak{G}_X^{(B)}$ nügt den Axiomen I—IX, nicht aber dem Axiom X.

§ 3.

Folgerungen in bezug auf die Addition[38]).

Vor allem soll die Gleichheitsrelation (die schon in die Axiome und Def. 3 einging) definiert werden; dies macht gewisse Überlegungen er-

[38]) In diesem Paragraphen werden nur die Axiome I—VI verwendet.

forderlich, da die Definition den auf S. 157 angedeuteten Bedingungen genügen muß, und wurde deshalb zurückgestellt, um den Zusammenhang in § 1 nicht zu unterbrechen.

Wird eine Relation $\mathfrak{R}$ zwischen zwei KZen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ durch das *gleichzeitige* Bestehen von Relationen der Form $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{S}(\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{a}$ charakterisiert, wobei $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ KZen bedeuten und das Zeichen $=$ die Identität bezeichnet (vgl. Ax. I), so ist zunächst die Relation zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ eine gegenseitige (symmetrische). Ferner steht jede KZ $\mathfrak{a}$ zu sich selbst in der Relation $\mathfrak{R}$, da nach Axiom II zu $\mathfrak{a}$ eine KZ $\bar{\mathfrak{a}}$ existiert, so daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{a}$; die Identität ist also ein Spezialfall der Relation $\mathfrak{R}$. Es stehe weiter $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}$ zu $\mathfrak{f}$ in der Relation $\mathfrak{R}$, d. h. es sei $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{f}$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{c}$; dann ist[39]) nach dem assoziativen Gesetz der Addition (Axiom V)

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1), \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{S}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1)) = \mathfrak{f},$$
$$\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{b}_2), \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{S}(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_2)) = \mathfrak{a},$$

d. h. $\mathfrak{a}$ steht zu $\mathfrak{f}$ in der Relation $\mathfrak{R}$, die somit transitiv ist. Damit ist gezeigt, daß der Relation $\mathfrak{R}$ jedenfalls die allgemeinen Eigenschaften jeder *Äquivalenz* zukommen; besteht die Relation $\mathfrak{R}$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, so werde vorläufig $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{c}$ geschrieben.

Um diese Äquivalenz als *Gleichheit* im Grundbereich der KZen betrachten zu können, hat man noch nachzuweisen, daß sie gleich der Identität die Eigenschaft besitzt, daß äquivalente KZen bei den Operationen des Grundbereichs einander vertreten können. Dies geschehe vorläufig für die Addition, während der Nachweis für die Multiplikation dem nächsten Paragraphen (S. 179) vorbehalten bleibe. Es sei also $\mathfrak{A}$ ein Bereich von KZen, für den die Summe $\mathfrak{S}\mathfrak{A}$ existiert; $\mathfrak{A}$ ist demnach (Def. 2) eine Menge, etwa

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots\},$$

wobei die Indizes nur der bequemeren Schreibweise dienen, nicht etwa Abzählbarkeit andeuten[40]). Weiter sei jede KZ $\mathfrak{a}_k$ von $\mathfrak{A}$ einer gegebenen anderen (mit ihr identischen oder nicht identischen) KZ $\mathfrak{c}_k$ im angeführten Sinne äquivalent, d. h. es seien $\mathfrak{b}_k$ und $\mathfrak{d}_k$ KZen, für die

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k) = \mathfrak{c}_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}(\mathfrak{c}_k, \mathfrak{d}_k) = \mathfrak{a}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots$$

---

[39]) Es wird hierbei davon Gebrauch gemacht, daß jeder Bereich von zwei KZen eine Menge bildet, daß also nach Axiom I zwei KZen stets addiert werden dürfen. Zum Beweis hat man nur, falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ irgend zwei verschiedene KZen sind (vgl. Axiom III), von den nach Axiom II jedenfalls bestehenden Beziehungen $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1) = \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{S}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}$ (bzw. $\mathfrak{S}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}$) auszugehen und die Definitionen 1 und 2 zu verwenden.

[40]) Eine solche Bezeichnungsweise wird im folgenden öfters verwandt.

. Nach Def. 2 stellt dann auch der Bereich $\mathfrak{C}$ aller KZen $\mathfrak{c}_k$ eine Menge r, ebenso der Bereich $\mathfrak{B}$ aller KZen $\mathfrak{b}_k$ und der Bereich $\mathfrak{D}$ aller KZen $\mathfrak{d}_k$. ach dem assoziativen und dem kommutativen Gesetz der Addition (Ax. V d VI) ist daher

$$\mathfrak{S}\mathfrak{C} = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}\mathfrak{A}, \mathfrak{S}\mathfrak{B}), \quad \mathfrak{S}\mathfrak{A} = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}\mathfrak{C}, \mathfrak{S}\mathfrak{D}),$$

h. $\mathfrak{S}\mathfrak{A} \sim \mathfrak{S}\mathfrak{C}$. Damit ist (wenigstens soweit die Addition in Frage kommt, f die sich die Betrachtungen dieses Paragraphen beschränken) die Recht-äßigkeit der folgenden Definition nachgewiesen:

Definition 4. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{c}$ *KZen, so heißt* $\mathfrak{a}$ *gleich* $\mathfrak{c}$ $(\mathfrak{a} = \mathfrak{c})$, *wenn zu* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{c}$ *KZen* $\mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{b}$ *gibt, so daß gleichzeitig*

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{c} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^{41}).$$

Die Vergleichung der Definitionen 3 (S. 159) und 4 zeigt, daß jede ner finiten KZ gleiche KZ finit, jeder einer transfiniten KZ gleiche KZ ansfinit ist.

Als zweite Relation soll im Grundbereich der KZen eine *Ordnungs-lation* eingeführt werden durch

Definition 5. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{c}$ *KZen und gibt es eine KZ* $\mathfrak{b}$, *für die* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{c}$, *aber keine KZ* $\mathfrak{b}$, *für die* $\mathfrak{S}(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$, *so wird* $\mathfrak{a}$ *kleiner s* $\mathfrak{c}$ $(\mathfrak{a} < \mathfrak{c})$ *genannt. Gleichbedeutend mit* $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ *wird* $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$ ($\mathfrak{c}$ *größer s* $\mathfrak{a}$) *geschrieben.*

Die Beziehung $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{c}$ *läßt sich hiernach auch in der Form* $\leqq \mathfrak{c}$ *schreiben.*

Diese Definition steht mit dem üblichen Begriff einer Ordnungsrelation ensoweit im Einklang, als dies in der Mengenlehre der Fall ist, falls man m Wohlordnungssatz (Auswahlprinzip) absieht (Standpunkt vor Beweis s Wohlordnungssatzes). Es gilt nämlich:

Satz 1. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{c}$ *zwei KZen, von denen höchstens eine transfinit t, so gilt stets eine und nur eine der Beziehungen* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a} > \mathfrak{c}$. *us* $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c} < \mathfrak{f}$, $\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{h}$ *folgt stets* $\mathfrak{a} < \mathfrak{h}$ (*also um so mehr* $\mathfrak{c} < \mathfrak{h}$). *Ist* $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots) = \mathfrak{a}$ *und für jeden Index* k *stets* $\mathfrak{a}_k \leqq \mathfrak{c}_k$[42]), *so daß* (*nach ef. 2 und Axiom I*) *auch* $\mathfrak{S}(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots) = \mathfrak{c}$ *existiert, so ist* $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c}$.[43])

Beweis. Nach Axiom II gilt, falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ nicht beide transfinit sind, indestens eine der Beziehungen $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{S}(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$. Je nachdem

[41]) Die Gleichheitszeichen in dieser Zeile bezeichnen natürlich die Identität (im nne des Axioms I). — Wegen der *Bestimmtheit* der KZen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}$ sei auf die rtführung des vorliegenden Aufsatzes verwiesen; ebenso in bezug auf Def. 5 und 6.

[42]) Vgl. Fußnote 40.

[43]) Wie in der Mengenlehre kann hier nicht $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ geschlossen werden, wenn ch stets $\mathfrak{a}_k < \mathfrak{c}_k$.

entweder Beziehungen beider Art gleichzeitig gelten oder nur solche der ersten oder nur solche der zweiten Art, ist nach den Definitionen 4 und 5 $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{c} < \mathfrak{a}$ (d. h. $\mathfrak{a} > \mathfrak{c}$). Der Äquivalenzsatz erscheint also hier in der Form der Gleichheitsdefinition, die sich ihrerseits als rechtmäßig zu erweisen hatte. — Es sei ferner $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c} < \mathfrak{f}$, $\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{h}$, d. h.

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{S}(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{f}, \quad \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{h},$$

während keine Beziehung der Form $\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \overline{\mathfrak{b}}) = \mathfrak{c}$ bestehe. Dann folgt zunächst durch wiederholte Anwendung von Axiom V

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}), \mathfrak{g})) = \mathfrak{h}.$$

Gäbe es andererseits eine KZ $\mathfrak{k}$, so daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{h}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{a}$, so folgte in analoger Weise

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}), \mathfrak{b})) = \mathfrak{c}$$

im Widerspruch mit der Voraussetzung $\mathfrak{c} < \mathfrak{f}$. Es ist also wirklich $\mathfrak{a} < \mathfrak{h}$. — Um sich von der Richtigkeit der letzten Behauptung von Satz 1 zu überzeugen, hat man nur das Beweisverfahren, das oben (S. 172 u. 173) der Def. 4 vorausging, teilweise nochmals heranzuziehen.

Satz 2. *Jede finite KZ ist kleiner als jede transfinite.*

Beweis. Ist $\mathfrak{f}$ eine finite, $\mathfrak{t}$ eine transfinite KZ, so sei (vgl. Def. 3)

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{u}, \mathfrak{t}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{v}, \mathfrak{t}) = \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{u} \neq \mathfrak{v}.$$

Existierte eine KZ $\mathfrak{g}$, so daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{f}$, so folgte nach Axiom V

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{u}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{v}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{f}, \quad \mathfrak{u} \neq \mathfrak{v},$$

d. h. $\mathfrak{f}$ wäre entgegen der Voraussetzung transfinit. Da also nach Axiom II eine Beziehung der Form $\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{t}$ besteht, so ist $\mathfrak{f} < \mathfrak{t}$.

Satz 3. *Es gibt eine einzige KZ, die weder finit noch transfinit ist; sie werde die Null* (0) *genannt. Die Null ist die kleinste KZ und es ist für jede KZ* $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, 0) = \mathfrak{a}$.

Beweis. $\mathfrak{f}$ sei eine finite KZ (Def. 3 und Ax. III); nach Axiom II existiert eine KZ $0_\mathfrak{f}$, für die $\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, 0_\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}$. Nach Axiom V folgt $\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{S}(0_\mathfrak{f}, 0_\mathfrak{f})) = \mathfrak{f}$, woraus sich nach Ax. VI und Def. 3 ergibt: $\mathfrak{S}(0_\mathfrak{f}, 0_\mathfrak{f}) = 0_\mathfrak{f}$. Da zudem nach Def. 5 $0_\mathfrak{f} \leqq \mathfrak{f}$ ist, so kann nach Satz 2 und Def. 3 $0_\mathfrak{f}$ weder finit noch transfinit sein.

Es seien nun $0'$ und $0''$ zwei *verschiedene* KZen, die weder finit noch transfinit sind; dann ist insbesondere $\mathfrak{S}(0', 0') = 0'$ und $\mathfrak{S}(0'', 0'') = 0'$. Es sei (ohne Beschränkung der Allgemeinheit, vgl. Satz 1) $0' < 0''$, etwa $\mathfrak{S}(0', \mathfrak{a}) = 0''$. Nach Axiom V folgt $0'' = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(0', 0'), \mathfrak{a}) = \mathfrak{S}(0', 0'')$; da andererseits $\mathfrak{S}(0'', 0'') = 0''$, so wäre $0''$ nach Def. 3 transfinit gegen die Voraussetzung. Es gibt also nur eine einzige weder finite noch transfinite KZ 0; ihre Addition läßt nach dem vorigen Absatz jede finite KZ

ie auch sie selbst) ungeändert und sie ist kleiner als jede finite, um so ehr als jede transfinite KZ.

Es sei ferner t eine transfinite KZ und $\mathfrak{S}(0,u)=t$; dann folgt $=\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(0,0),u)=\mathfrak{S}(0,t)$, d. h. die Addition der Null läßt auch jede ansfinite KZ ungeändert. Hierdurch wird Ax. II wesentlich ergänzt.

Nach Def. 3 und 5 folgt aus den letzten Ergebnissen noch:

Satz 4: *Ist* $a \neq 0$, b *gleich Null oder einer finiten KZ, so ist* $(a,b)>b$.

Nach den Axiomen III und IV gibt es mindestens eine finte KZ $\mathfrak{f}$, für e aus $\mathfrak{S}(\mathfrak{f},a)=\mathfrak{S}(\mathfrak{f},b)$ stets $a=b$ folgt. Eine solche werde von nun an stgehalten und bilde den Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen. ne nähere Bestimmung der KZ $\mathfrak{f}$ wird erst im nächsten Paragraphen folgen, in Rücksicht auf die Gesetze der Multiplikation (Axiome VIII nd IX) und auf Axiom X. Daß vom Standpunkt des gegenwärtigen aragraphen aus, in dem lediglich die auf die Addition bezüglichen xiome I—VI verwendet werden, keine bestimmte Festlegung von $\mathfrak{f}$ möglich , leuchtet ohne weiteres ein. Es genügt hierzu auf Systeme von der auf 170 angeführten Art hinzuweisen, die keine Eins, sondern an finiten KZen ur die durch eine bestimmte natürliche Zahl n teilbaren enthalten. Anderer- its sind auf dem jetzigen Standpunkt auch umfassendere, keine kleinste nite KZ aufweisende Bereiche denkbar wie z. B. derjenige, der (bei ge- gneter Definition der Addition) außer 0 und den transfiniten KZen alle ositiven reellen Zahlen umfaßt.

Die KZ $\mathfrak{S}(\mathfrak{f},\mathfrak{f})$, die nach Satz 4 größer ist als $\mathfrak{f}$, ist wiederum finit. enn gäbe es eine von 0 verschiedene KZ $\mathfrak{g}$, für die $\mathfrak{S}(\mathfrak{g},\mathfrak{S}(\mathfrak{f},\mathfrak{f}))$ $=\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{g},\mathfrak{f}),\mathfrak{f})=\mathfrak{S}(\mathfrak{f},\mathfrak{f})$ wäre, so folgte aus Ax. VI und IV:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{g},\mathfrak{f})=\mathfrak{f}, \quad \text{d. h. nach Satz 4:} \quad \mathfrak{g}=0.$$

$(\mathfrak{f},\mathfrak{f})$ werde zur Abkürzung der Schreibweise auch durch $2\mathfrak{f}$ bezeichnet; ntsprechend werde statt $\mathfrak{f}$ gelegentlich auch $1\mathfrak{f}$ geschrieben.

Weiter ist $\mathfrak{S}(2\mathfrak{f},\mathfrak{f})>2\mathfrak{f}$ und gleichfalls finit, wie analog folgt; diese Z werde durch $3\mathfrak{f}$ bezeichnet. Es ergibt sich so eine Folge von KZen $\mathfrak{f}$, $2\mathfrak{f}$, $3\mathfrak{f}$, ..., $n\mathfrak{f}$, ..., wobei die untereinander sämtlich verschiedenen ymbole 1, 2, ..., n, ... offenbar die bekannten Eigenschaften[44]) der Reihe er natürlichen Zahlen besitzen und, ohne daß damit Voraussetzungen aus er Zahlenlehre gemacht werden, durch die Schreibweise der natürlichen

[44]) Kurz etwa: Es gibt eine Zahl, zu jeder eine nächste, keine zwei gleichen und eine außer den damit geforderten. Die letzte Eigenschaft ermöglicht die Anwendung er vollständigen Induktion (worunter hier stets die gewöhnliche, finite Induktion erstanden wird). Vgl. die Literaturangaben in Fußnote 3.

Zahlen bezeichnet werden können. Die „natürlichen Zahlen" $1, 2, \ldots, n, \ldots$ dienen lediglich der Abkürzung und werden zu diesem Zweck der wiederholt zu addierenden KZ ohne verbindendes Zeichen vorangestellt; die KZen $\mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, \ldots, n\mathfrak{f}, \ldots$ werden als die natürlichen Vielfachen von $\mathfrak{f}$ bezeichnet. Vollständige Induktion ergibt somit:

Satz 5. *Die natürlichen Vielfachen $n\mathfrak{f}$ einer dem Axiom IV genügenden finiten KZ $\mathfrak{f}$ sind sämtlich untereinander verschieden und sämtlich finit.*

Die Addition dieser KZen erfolgt in bekannter Weise und bedarf keiner näheren Erörterung. Insbesondere ist $\{\mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, \ldots, n\mathfrak{f}\}$ eine unmittelbare Menge im Sinne der Def. 1. — Beim Beweis der beiden folgenden Sätze wird nur mehr Satz 5 benutzt und nicht die in Ax. IV ausgedrückte Eigenschaft von $\mathfrak{f}$, was für später (S. 183 f.) von Bedeutung ist.

Da jede der finiten KZen $n\mathfrak{f}$ nach Satz 2 kleiner ist als jede transfinite KZ und da es nach Axiom III mindestens eine transfinite KZ gibt, so bildet nach Def. 1 die Gesamtheit *aller* natürlichen Vielfachen von $\mathfrak{f}$ eine Menge. Nach Axiom I ist daher die Summe aller KZen $n\mathfrak{f}$ wieder eine KZ, die im folgenden stets mit $\mathfrak{t}$ bezeichnet werde (und natürlich, wenn dies in der Bezeichnung auch nicht hervortritt, von $\mathfrak{f}$ abhängt). Es gilt:

Satz 6. *Die Summe $\mathfrak{t}$ aller natürlichen Vielfachen der finiten KZ $\mathfrak{f}$ ist transfinit; insbesondere ist* $\mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{t}, 2\mathfrak{f}) = \ldots = \mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$.

Beweis. Da $\mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{f}) \geqq \mathfrak{t}$, ist (Def. 4) nur mehr zu beweisen, daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{f}) \leqq \mathfrak{t}$. Nun ist nach dem assoziativen und kommutativen Gesetz (Ax. V und VI)

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{t}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, 3\mathfrak{f}, \ldots)\ ^{45}).$$

Nach Def. 2 ist ferner der Bereich $\mathfrak{A}$, der aus der Menge $\{\mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, 3\mathfrak{f}, \ldots\}$ dadurch hervorgeht, daß jede KZ $n\mathfrak{f}$ durch $\mathfrak{f}$ ersetzt wird, gleichfalls eine Menge; es sei $\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \mathfrak{t}'$. Dann ist nach dem assoziativen und dem kommutativen Gesetz und Satz 3

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{f}), \mathfrak{t}') &= \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, 3\mathfrak{f}, \ldots 0, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}, \ldots) \\ &= \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, 0), \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}), \mathfrak{S}(2\mathfrak{f}, \mathfrak{f}), \mathfrak{S}(3\mathfrak{f}, \mathfrak{f}), \ldots) \\ &= \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, 3\mathfrak{f}, \ldots) = \mathfrak{t}.\end{aligned}$$

Es ist also $\mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{f}) \leqq \mathfrak{t}$, d. h. $\mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{t} = \mathfrak{S}(\mathfrak{t}, 2\mathfrak{f}) = \ldots$.

Ferner ist

$$\mathfrak{t} \leqq \mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}), \mathfrak{S}(2\mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}), \ldots) = \mathfrak{S}(2\mathfrak{f}, 4\mathfrak{f}, 6\mathfrak{f}, \ldots).$$

[45]) Diese Summe existiert, da z. B. $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, 3\mathfrak{f}, \ldots\}$ eine unmittelbare Menge ist; entsprechende Überlegungen werden im folgenden öfter benutzt und nicht ausdrücklich ausgesprochen.

tzt man $\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, 3\mathfrak{f}, 5\mathfrak{f}, \ldots) = \mathfrak{t}''$, so folgt

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}) \leqq \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}), \mathfrak{t}'') = \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, 3\mathfrak{f}, 4\mathfrak{f}, \ldots) = \mathfrak{t},$$

h. es ist wirklich $\mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}) = \mathfrak{t} = \mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}, \mathfrak{t}) = \ldots$.

Definition 6. *Ist $n\mathfrak{f}$ ein natürliches Vielfaches der KZ $\mathfrak{f}$ und wird jeder KZ $\bar{\mathfrak{t}}$ der Menge $\{\mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, \ldots, n\mathfrak{f}\}$ eine KZ $\bar{\mathfrak{t}}$ eindeutig gegeben, heißt die Menge aller KZen $\bar{\mathfrak{t}}$ eine endliche Menge von KZen.*

Wird zu jeder KZ $\bar{\mathfrak{t}}$ der Menge $\{\mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, 3\mathfrak{f}, \ldots\}$ aller natürlichen elfachen der KZ $\mathfrak{f}$ eine KZ $\bar{\mathfrak{t}}$ eindeutig gegeben, so heißt die Menge er KZen $\bar{\mathfrak{t}}$ eine abgezählte Menge von KZen.

Auf Grund dieser Begriffsbildungen, die sich wesentlich auf die in . III enthaltene Forderung einer transfiniten KZ (im Dedekindschen nn) stützen, ist wie üblich zu schließen, daß eine gegebene Teilmenge ier abgezählten Menge von KZen entweder endlich oder abgezählt ist.

Satz 7. *Die Addition einer abgezählten Menge von KZen, in der r natürliche Vielfache der finiten KZ $\mathfrak{f}$ und die transfinite KZ $\mathfrak{t}$ der allgemeiner irgendwelche KZen $\bar{\mathfrak{t}}$ von der Eigenschaft $\mathfrak{f} \leqq \bar{\mathfrak{t}} \leqq \mathfrak{t}$) rkommen*[46]*), ergibt stets die Summe $\mathfrak{t}$.*

Beweis. Es genügt die Richtigkeit der Behauptung für die beiden tremen Fälle zu beweisen, in denen alle Summanden entweder $= \mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{t}$ sind; denn in jedem anderen Fall liegt die Summe nach Satz 1 zwischen n extremen Werten. Der Beweis vollzieht sich wie üblich. Es ist nämh nach dem assoziativen Gesetz:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}, \ldots) = \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}), \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}), \ldots) = \mathfrak{t}$$

d vermöge der üblichen Umordnung (einer Doppelfolge zu einer einhen Folge):

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}, \mathfrak{t}, \ldots) &= \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, 3\mathfrak{f}, \ldots), \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, 3\mathfrak{f}, \ldots), \ldots) \\ &= \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{S}(2\mathfrak{f}, \mathfrak{f}), \mathfrak{S}(3\mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, \mathfrak{f}), \ldots) \\ &= \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, 3\mathfrak{f}, 6\mathfrak{f}, \ldots) \leqq \mathfrak{t}, \text{ also } = \mathfrak{t}.\end{aligned}$$

Aus Satz 7 folgt insbesondere, daß die transfinite KZ $\mathfrak{t}$ sich aus der beliebigen der KZen $n\mathfrak{f}$ in der nämlichen Weise bilden läßt wie s $\mathfrak{f}$ selbst.

Natürlich gilt die Aussage des Satzes 7 gemäß Satz 3 auch noch r den Fall, daß in einer endlichen Menge von Summanden diese durch illen ersetzt werden. Die Summe einer abgezählten Menge von Nullen rd erst im folgenden Paragraphen bestimmt werden.

---

[46]) Daß die Kriterien der Mengenexistenz (Def. 1 und 2) hierbei stets erfüllt d, leuchtet ein, da ja jede KZ der Menge gleich oder kleiner als $\mathfrak{t}$ ist.

Ebenso wie die Summe einer endlichen Menge von untereinander gleichen KZen — als natürliches Vielfaches einer KZ $\mathfrak{k}$ — durch die einfache Bezeichnung $n\mathfrak{k}$ unter Verwendung der üblichen Symbole der natürlichen Zahlen charakterisiert wurde, soll von nun an auch *die Summe einer abgezählten Menge von KZen, die sämtlich gleich $\mathfrak{k}$ sind, abkürzend durch das Symbol $\aleph_0\mathfrak{k}$ bezeichnet werden.*

Es ist also nach Satz 7: $\aleph_0\mathfrak{f} = \aleph_0(\aleph_0\mathfrak{f}) = \mathfrak{t}$.

Auf Grund der Def. 1 und 2 sind unter Verwendung der Ax. I bis VI nur Summen über endliche Mengen und abzählbare Mengen (ein in der systematischen Darstellung hier nicht benötigter Begriff) zu bilden. Man wird also durch die Addition zu weiteren KZen als den bisher betrachteten nicht mehr notwendig geführt. Im nächsten Paragraphen wird sich zeigen, daß *bei passender Wahl der finiten KZ* $\mathfrak{f}$ auch die Ausführung der Multiplikation nach den Ax. VII—IX, wenn man von $0, \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{t}$ ausgeht, nicht zu neuen KZen führt, die *kleiner* als $\mathfrak{t}$ sind. Natürlich schließt dies nicht aus, daß noch weitere KZen $< \mathfrak{t}$ innerhalb des Axiomensystems Platz finden, und der auf S. 170 u. 171 behandelte Bereich $\mathfrak{G}_X^{(A)}$ beweist sogar, daß letzteres tatsächlich der Fall ist. Da aber Ax. X den zu betrachtenden Bereich als den *kleinsten* festlegt, in dem alle Axiome befriedigt werden, so kann hier von der Fortführung allgemeiner Betrachtungen über finite und transfinite KZen und ihre Addition abgesehen werden. Nur noch ein im nächsten Paragraphen benötigter Hilfssatz soll hier bewiesen werden.

Hilfssatz. Zu jeder transfiniten KZ $\mathfrak{u}$ gibt es mindestens eine *finite* KZ $\mathfrak{g}$, so daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{u}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{u}$. Die finite KZ $\mathfrak{g}$ kann insbesondere so gewählt werden, daß sie dem Ax. IV Genüge leistet. Gilt dies für eine KZ, so trifft es auch für jede kleinere KZ zu.

Beweis. Nach Def. 3 und Satz 3 gibt es zu $\mathfrak{u}$ eine von 0 verschiedene KZ $\mathfrak{v}$, so daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \mathfrak{u}$. Es sei eine beliebige KZ $\mathfrak{g} < \mathfrak{v}$ gegeben; dann ist nach Satz 1 $\mathfrak{S}(\mathfrak{u}, \mathfrak{g}) \leqq \mathfrak{u}$, andererseits nach Def. 5 $\mathfrak{S}(\mathfrak{u}, \mathfrak{g}) \geqq \mathfrak{u}$, also $\mathfrak{S}(\mathfrak{u}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{u}$. Ist also $\mathfrak{v}$ nicht schon finit, so kann nach Satz 2 eine finite KZ $\mathfrak{g}$ dafür genommen werden. — Es sei $\mathfrak{h}$ eine KZ, die Ax. IV befriedigt, für die also aus $\mathfrak{S}(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ folgt: $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Dann besitzt jede KZ $\mathfrak{g} < \mathfrak{h}$ um so mehr die nämliche Eigenschaft; denn ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$, so ist auch

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}), \mathfrak{k}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}), \mathfrak{k}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}),$$

d. h. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Man braucht also, wenn die transfinite KZ $\mathfrak{u}$ die Beziehung $\mathfrak{S}(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \mathfrak{u}$ $(\mathfrak{v} \neq 0)$ befriedigt und die finite KZ $\mathfrak{h}$ dem Ax. IV genügt, für $\mathfrak{g}$ nur die kleinere der beiden KZen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{h}$ zu wählen, um die zweite Behauptung des Hilfssatzes zu erfüllen.

§ 4.

Folgerungen in bezug auf die Multiplikation.

Es sollen jetzt die noch nicht benutzten Axiome VII—X herangezogen rden. Vor allem ist zur vollständigen Rechtfertigung der Gleichheits- inition 4 (S. 173) nachzuweisen, daß in einem Produkt beliebige Faktoren rch ihnen gleiche ersetzt werden dürfen, ohne daß sich dadurch das sultat ändert.

Es sei (vgl. Fußnote 40, S. 172)

$$\mathfrak{P}(a_1, a_2, a_3, \ldots) = a, \qquad \mathfrak{P}(c_1, c_2, c_3, \ldots) = c$$

d für jeden Index k:

$$a_k = c_k, \text{ d. h. } \mathfrak{S}(a_k, b_k) = c_k \text{ und } \mathfrak{S}(c_k, b_k) = a_k.$$

nn ist nach Ax. VIII und V

$$\begin{aligned} a &= \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(c_1, b_1), \mathfrak{S}(c_2, b_2), \mathfrak{S}(c_3, b_3), \ldots) \\ &= \mathfrak{S}(\mathfrak{P}(c_1, c_2, c_3, \ldots), \ldots) = \mathfrak{S}(c, c_0)^{47}) \end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned} c &= \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(a_1, b_1), \mathfrak{S}(a_2, b_2), \mathfrak{S}(a_3, b_3), \ldots) \\ &= \mathfrak{S}(\mathfrak{P}(a_1, a_2, a_3, \ldots), \ldots) = \mathfrak{S}(a, a_0), \end{aligned}$$

h. $a = c$, wie gezeigt werden sollte.

Es sei nun e eine KZ von der in Ax. IX geforderten Eigenschaft. s Ziel der nächsten Überlegungen ist der Nachweis, daß e finit ist.

Zu diesem Zweck werde e als transfinit angenommen. Dann existiert ch dem Hilfssatz von S. 178 eine dem Ax. IV genügende finite KZ f, die $\mathfrak{S}(e, f) = e$. Hieraus kann zunächst geschlossen werden, daß *rößer ist als die aus* f *gemäß Satz* 6 (S. 176) *zu bildende transfinite* $t = \aleph_0 f$.

In der Tat kann vor allem nicht $e = t$ sein. Denn nach jenem z 6 wäre dann $\mathfrak{S}(e, e) = \mathfrak{S}(t, t) = e$ und daher nach Ax. VIII und IX

$$\mathfrak{S}(f, f) = \mathfrak{S}(\mathfrak{P}(f, e), \mathfrak{P}(f, e)) = \mathfrak{P}(f, \mathfrak{S}(e, e)) = \mathfrak{P}(f, e) = f$$

Widerspruch mit Satz 5 (S. 176). Ebensowenig aber ist die Beziehung $< t$ möglich. Denn aus $\mathfrak{S}(e, f) = e$ folgt nach Ax. IX und VIII, wenn er eine abgezählte Menge von Faktoren, die sämtlich gleich e sind, ltipliziert wird:

$$= \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(e, f), \mathfrak{S}(e, f), \mathfrak{S}(e, f), \ldots)$$
$$= \mathfrak{S}(\mathfrak{P}(e, e, e, \ldots); \mathfrak{P}(f, e, e, \ldots), \mathfrak{P}(e, f, e, \ldots), \ldots; \mathfrak{P}(f, f, e, \ldots), \ldots; \ldots)$$
$$= \mathfrak{S}(e; f, f, \ldots; \mathfrak{P}(f, f, e, \ldots), \ldots; \ldots) \geqq \aleph_0 f = t.$$

---

[47]) Da nach Ax. VIII die vorangehende Summe existiert, so existiert nach Def. 2 Ax. I auch die Summe, die aus ihr durch Weglassung des Summanden c hervorgeht.

Es sei also $\mathfrak{e} > \mathfrak{t}$ (und nach Annahme $\mathfrak{S}(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{e}$). Daß hieraus kein Widerspruch gefolgert werden kann, beweist das auf S. 171 angegebene Beispiel für die Unabhängigkeit des Ax. X; *in dem dort betrachteten Bereich* $\mathfrak{G}_X^{(B)}$ *ist in der Tat die dem Ax. IX genügende Einheit transfinit*[48]). In diesem Fall aber schließt man zunächst, daß alle natürlichen Vielfachen von $\mathfrak{e}$ untereinander verschieden sind; denn aus $m\mathfrak{e} = n\mathfrak{e}$ folgt

$$\begin{aligned} m\mathfrak{f} &= m\mathfrak{P}(\mathfrak{f}, \mathfrak{e}) = \mathfrak{P}(\mathfrak{f}, m\mathfrak{e}) \text{ (Ax. VIII)} \\ &= \mathfrak{P}(\mathfrak{f}, n\mathfrak{e}) = n\mathfrak{f}, \end{aligned}$$

so daß nach Satz 5 (S. 176) m und n die nämliche natürliche Zahl darstellen muß. Daher besitzt die nach Ax. I existierende KZ $\aleph_0\mathfrak{e}$ analoge Eigenschaften wie die im vorigen Paragraphen betrachtete KZ $\aleph_0\mathfrak{f} = \mathfrak{t}$, obgleich $\mathfrak{e}$ (im Gegensatz zu $\mathfrak{f}$) transfinit ist. Man überzeugt sich weiter (vgl. unten S. 184 ff.), daß durch Anwendung der Axiome auf die KZen $\mathfrak{e}$ und $\aleph_0\mathfrak{e}$ zwar eventuell noch größere KZen gewonnen werden, daß dabei aber außer der Null keine von $\mathfrak{e}$ und seinen natürlichen Vielfachen verschiedene KZ entsteht, die kleiner als $\aleph_0\mathfrak{e}$ wäre. Wird nun der ganze gegenwärtig betrachtete Bereich von KZen mit $\overline{\mathfrak{G}}$ bezeichnet, so ist dennoch $\overline{\mathfrak{G}}$ nicht ein den Ax. I—X genügender Grundbereich, weil Ax. X nicht erfüllt ist. Läßt man nämlich aus $\overline{\mathfrak{G}}$ alle diejenigen KZen fort, die nicht aus $\mathfrak{e}$ und $\aleph_0\mathfrak{e}$ auf Grund der Ax. I—IX hervorgehen — also insbesondere alle von 0 verschiedenen KZen, die *kleiner* als $\mathfrak{e}$ sind —, so erhält man einen Teilbereich $\mathfrak{G}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$, der seinerseits alle Ax. I—X befriedigt; in $\mathfrak{G}$ ist nämlich $\mathfrak{e}$ nicht mehr transfinit, sondern (als die kleinste von 0 verschiedene KZ) finit, und $\mathfrak{e}$ besitzt auch ersichtlich die in Ax. IV geforderte Eigenschaft. Ferner folgt ebenso wie in den folgenden Betrachtungen, daß $\mathfrak{G}$ der kleinste Teilbereich der fraglichen Art von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist. Daher würde die Annahme $\mathfrak{e} > \aleph_0\mathfrak{f}$ dem Ax. X widersprechen; $\mathfrak{e}$ kann also nicht transfinit sein. Da die Annahme $\mathfrak{e} = 0$ wegen $\mathfrak{P}(\mathfrak{f}, 0) = \mathfrak{P}(\mathfrak{f}, \mathfrak{S}(0, 0)) = \mathfrak{S}(\mathfrak{P}(\mathfrak{f}, 0), \mathfrak{P}(\mathfrak{f}, 0))$ und Ax. IX dem Satz 5 widersprechen würde, so muß $\mathfrak{e}$ nach Satz 3 eine finite KZ sein.

In Ax. III wird die Existenz mindestens einer finiten KZ gefordert. Da die durch Ax. IX gesicherte KZ $\mathfrak{e}$ nach dem letzten Ergebnis finit ist, so hat man keine weitere finite KZ unabhängig einzuführen, will man nicht (vgl. oben) Ax. X verletzen. Dennoch kann auf die in Ax. III enthaltene Forderung

[48]) Aus der Annahme $\mathfrak{S}(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{e}$ folgt übrigens $\mathfrak{P}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = 0$, wie dies in dem erwähnten Bereich der Fall ist. Denn es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} = \mathfrak{P}(\mathfrak{f}, \mathfrak{e}) &= \mathfrak{P}(\mathfrak{f}, \mathfrak{S}(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})) = \mathfrak{S}(\mathfrak{P}(\mathfrak{f}, \mathfrak{e}), \mathfrak{P}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f})) \text{ (Ax. VIII)} \\ &= \mathfrak{S}(\mathfrak{f}, \mathfrak{P}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f})), \end{aligned}$$

also, da $\mathfrak{f}$ finit ist, $\mathfrak{P}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = 0$. — $\mathfrak{f}$ und die übrigen finiten KZen dieses Systems sind „unendlichklein" (nichtarchimedisch) im Vergleich zur Einheit $\mathfrak{e}$.

r Existenz einer finiten KZ nicht etwa (in Rücksicht auf die in Ax. IX thaltene Existenzforderung) ganz verzichtet werden. Denn der Beweis, ß e finit ist, kann nur geführt werden auf Grund der Annahme, daß erhaupt eine finite KZ existiert; im gegenteiligen Fall wird Ax. IX rch transfinites e befriedigt, wie die zum Unabhängigkeitsnachweis für n ersten Teil von Ax. III konstruierten Bereiche (S. 165 f.) zeigen.

Bedenkt man noch, daß für zwei dem Ax. IX genügende KZen e d e′ folgt:

$$e = \mathfrak{P}(e, e') = e',$$

erhält man:

Satz 8. *Es gibt eine einzige und zwar finite KZ* e, *die dem xiom IX genügt; sie werde die Einheit genannt.*

Man könnte nun schließen, daß es genügt, die KZ e und ihre natürhen Vielfachen, für die die in Ax. IV ausgedrückte Eigenschaft leicht chzuweisen ist, als finite KZen zuzulassen, und daß aus ihnen allein der undbereich aufgebaut werden kann. Eine solche, sich wesentlich auf . X stützende Überlegung heranzuziehen ist indes nicht erforderlich. Es nn und soll nämlich gezeigt werden, daß die Annahme, es gebe eine einere finite KZ als die Einheit e, für sich zu Widersprüchen führt. erzu sind einige Hilfsbetrachtungen erforderlich.

Vor allem erkennt man in entsprechender Weise wie zu Beginn dieses ragraphen (bei der Betrachtung der Gleichheit), daß Kleineres, mit einerem oder Gleichem multipliziert, Kleineres oder Gleiches ergibt; härfer:

Satz 9. *Ist* $\mathfrak{P}(a_1, a_2, a_3, \ldots) = a$, $\mathfrak{P}(b_1, b_2, b_3, \ldots) = b$ [49]), *und lt für jeden Index* k: $a_k \leqq b_k$, *so ist* $a \leqq b$.

Ist a eine beliebige KZ, so existiert nach Ax. VII das Produkt über ne abgezählte Menge von Faktoren, deren jeder gleich a ist. Analog der f S. 178 eingeführten Bezeichnung soll dieses Produkt $\mathfrak{P}(a, a, a, \ldots)$ s $a^{\aleph_0}$ geschrieben werden. Nach Ax. IX ist

$$e^{\aleph_0} = e$$

d daher nach Ax. VIII

$$e = (\mathfrak{S}(e, 0))^{\aleph_0} = \mathfrak{S}(e^{\aleph_0}; \ldots; 0^{\aleph_0}) = \mathfrak{S}(e, g),$$

$g \geqq 0^{\aleph_0}$; da e finit ist, so folgt nach den Sätzen 4 und 3 (S. 174 f.):

$$0^{\aleph_0} = 0.$$

Bedeutet weiter a eine beliebige KZ, so läßt sich über das Produkt

[49]) Vgl. Fußnote 40, S. 172.

$(\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}))^{\aleph_0} = (2\mathfrak{a})^{\aleph_0}$ die folgende Bemerkung machen. Man erhält nach Ax. VIII das Produkt

$$(2\mathfrak{a})^{\aleph_0} = \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}), \mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}), \mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}), \ldots)$$

durch Addition von lauter Produkten, die aus jeder der vorkommenden Summen $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ einen der beiden Summanden als Faktor enthalten. Die zu addierenden Summanden sind demnach alle gleich $\mathfrak{a}^{\aleph_0}$. *Einen Teil* dieser Summanden erhält man auf folgende Weise: Man wählt von der ersten Summe den ersten Summanden, von allen übrigen Summen den zweiten und bildet das Produkt; man wählt ferner von der zweiten Summe den ersten Summanden, von allen übrigen Summen den zweiten; ebenso von der dritten Summe den ersten Summanden, von allen übrigen Summen den zweiten; usw. Auf diese Weise erhält man eine abgezählte Menge von zu addierenden Produkten, deren jedes gleich $\mathfrak{a}^{\aleph_0}$ ist. Daher ist jedenfalls:

$$(2\mathfrak{a})^{\aleph_0} \geqq \aleph_0(\mathfrak{a}^{\aleph_0}) \tag{3}$$

Setzt man insbesondere $\mathfrak{a} = 0$, so folgt: $(\mathfrak{S}(0, 0))^{\aleph_0} \geqq \aleph_0(0^{\aleph_0}) = \aleph_0 0$ nach (2). Da andererseits nach Satz 3 (S. 174) und (2) $(\mathfrak{S}(0, 0))^{\aleph_0} = 0^{\aleph_0} = 0$ ist, so erhält man $\aleph_0 0 \leqq 0$, d. h. nach Satz 3:

$$\aleph_0 0 = 0, \tag{4}$$

womit die auf S. 177 unten offengelassene Lücke ausgefüllt ist.

Aus einer beliebig gegebenen KZ $\mathfrak{a}$ läßt sich eine neue $\bar{\mathfrak{a}}$ auf folgende Art bilden:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{a}} = (\aleph_0 \mathfrak{a})^{\aleph_0} &= \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \ldots), \mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \ldots), \ldots) \\ &= \mathfrak{S}(\mathfrak{a}^{\aleph_0}, \mathfrak{a}^{\aleph_0}, \ldots) = \Sigma \mathfrak{a}^{\aleph_0}. \end{aligned} \tag{5}$$

$\bar{\mathfrak{a}}$ ist eine in völlig bestimmter, hier nicht näher zu untersuchender Weise aus lauter Summanden $\mathfrak{a}^{\aleph_0}$ zusammengesetzte Summe, die also nur von $\mathfrak{a}$ (oder auch nur von $\mathfrak{a}^{\aleph_0}$) abhängt und im folgenden stets durch $\Sigma \mathfrak{a}^{\aleph_0}$ bezeichnet werden soll. Da $\aleph_0 \mathfrak{a} \geqq 2\mathfrak{a}$, so folgt wegen (3) und Satz 9:

$$\Sigma \mathfrak{a}^{\aleph_0} \geqq \aleph_0(\mathfrak{a}^{\aleph_0}). \tag{6}$$

Nach diesen Vorbereitungen werde angenommen, es existiere eine von 0 verschiedene KZ $\mathfrak{b} < \mathfrak{e}$, die daher nach Satz 8 (S. 181) und Satz 2 (S. 174) finit ist. Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $2\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{e}$. Denn ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{b}, \bar{\mathfrak{b}}) = \mathfrak{e}$ (Def. 5), so daß $0 < \bar{\mathfrak{b}} < \mathfrak{e}$, so ist die Annahme $\mathfrak{b} \leqq \bar{\mathfrak{b}}$ zulässig, da sonst $\mathfrak{b}$ mit $\bar{\mathfrak{b}}$ vertauscht werden kann. Dann ist aber nach Satz 1 (S. 173) $\mathfrak{S}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = 2\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{e}$.

Es sind nun zwei Fälle möglich. *Erstens* kann $\aleph_0 \mathfrak{b} \leqq \mathfrak{e}$ sein, woraus insbesondere folgen würde, daß alle natürlichen Vielfachen von $\mathfrak{b}$ kleiner

ären als e, daß also $\mathfrak{d}$ nichtarchimedisch in bezug auf e wäre. Dieser Fall t ausgeschlossen, weil sich entsprechend wie beim Beweise des Satzes 6 . 176) ergeben würde $\mathfrak{S}(\aleph_0 \mathfrak{d}, \mathfrak{d}) = \aleph_0 \mathfrak{d}$, so daß $\aleph_0 \mathfrak{d}$ transfinit wäre; dies ände wegen Satz 2 im Gegensatz dazu, daß e finit ist.

Es sei also *zweitens* $\aleph_0 \mathfrak{d} > \mathfrak{e}$, was namentlich stets dann der Fall ist, enn $\mathfrak{d}$ archimedisch oder „endlich" in bezug auf die Einheit e ist. Für esen Fall läßt sich aber gleichfalls die Existenz einer finiten KZ von der en ersten Fall kennzeichnenden Eigenschaft nachweisen; eine solche KZ ist B. $\mathfrak{d}^{\aleph_0}$.

Vor allem ist nämlich $\mathfrak{d}^{\aleph_0} > 0$. Denn es ist (vgl. (5) auf S. 182):

$$\Sigma 0^{\aleph_0} = (\aleph_0 0)^{\aleph_0} = 0 \quad \text{nach (4) und (2)},$$

gegen

$$\Sigma \mathfrak{d}^{\aleph_0} = (\aleph_0 \mathfrak{d})^{\aleph_0} \geqq \mathfrak{e}^{\aleph_0} \text{ (Satz 9)} = \mathfrak{e} \quad \text{nach (1)},$$

daß $\mathfrak{d}^{\aleph_0} \neq 0$ sein muß.

Ferner ist, da nach Voraussetzung (S. 182) $2\mathfrak{d} \leqq \mathfrak{e}$:

$$\aleph_0(\mathfrak{d}^{\aleph_0}) \leqq (2\mathfrak{d})^{\aleph_0} \quad \text{nach (3)}$$
$$\leqq \mathfrak{e}^{\aleph_0} \text{ (Satz 9)} = \mathfrak{e} \quad \text{nach (1)},$$

mit dieser Fall auf den ersten ($\aleph_0 \mathfrak{d} \leqq \mathfrak{e}$) zurückgeführt ist[50]). Es hat h also ergeben:

Satz 10. *Die Einheit* e *ist die kleinste finite, d. h. nächst der Null erhaupt die kleinste KZ. All ihre natürlichen Vielfachen sind untereinander verschieden und sämtlich finit.*

Was den noch nicht bewiesenen zweiten Teil des Satzes 10 betrifft, läßt sich die Verschiedenheit aller natürlichen Vielfachen von e *nur* f Grund des Axioms IV erschließen, das umgekehrt auch *lediglich zu esem Nachweis* erforderlich ist; Ax. IV könnte geradezu durch die (freih wohl weniger einfache) Forderung ersetzt werden, daß alle natürlichen elfachen der Einheit verschieden sind (vgl. S. 166). — Der Beweis dieser zweiBehauptung des Satzes 10 verläuft, da eine dem Ax. IV und also auch m Satze 5 (S. 176) genügende KZ $\mathfrak{f}$ existieren muß, wörtlich wie auf 180. Es ist also für beliebiges n z. B. $\mathfrak{S}(n\mathfrak{e}, \mathfrak{e}) > n\mathfrak{e}$, so daß aus

[50]) Die vorangehenden Überlegungen werden durch folgende Deutung anaulicher werden: Sie zeigen im besonderen, daß ein System, das außer den öhnlichen KZen der Mengenlehre noch die reellen Zahlen — oder auch nur eine zige nicht ganzzahlige reelle Zahl — enthält, notwendig eine (von 0 verschiedene) nendlichkleine" Zahl enthält, und daß die Existenz einer solchen zu Widersprüchen t Satz 8) führt (im angeführten Fall lassen sich speziellere Widersprüche leicht eben). Kommt z. B. $\frac{1}{2}$ in dem System vor, so ist $(\frac{1}{2})^{\aleph_0}$ eine derartige Zahl; kann nämlich nicht $(\frac{1}{2})^{\aleph_0} = 0$ sein, weil $(\aleph_0 \frac{1}{2})^{\aleph_0} = \Sigma(\frac{1}{2})^{\aleph_0}$ nicht gleich $\Sigma 0^{\aleph_0} = 0$

$\mathfrak{S}(n\mathfrak{e}, \mathfrak{g}) = n\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g} \neq 0$ nach Satz 1 (S. 173) $\mathfrak{g} < \mathfrak{e}$ folgen würde im Widerspruch mit dem Anfang des Satzes 10; $n\mathfrak{e}$ ist also wirklich finit [51]).

Wird $\mathfrak{e}$, wie es nach Satz 10 geschehen kann (vgl. S. 176), für die in den Sätzen 5 bis 7 behandelte KZ $\mathfrak{f}$ eingesetzt, so wird die transfinite KZ $\mathfrak{t} = \aleph_0\mathfrak{e}$. Wie man durch Verwendung von Ax. II und Satz 1 leicht erkennt, kann es keine von 0 und allen natürlichen Vielfachen von $\mathfrak{e}$ verschiedene KZ geben, die kleiner als irgendeines dieser Vielfachen wäre; sonst müßte zwischen 0 und $\mathfrak{e}$ eine KZ existieren. Dagegen scheint es nicht ausgeschlossen zu sein, daß es entweder eine finite KZ (und dann deren unendlich viele) gibt, die größer als alle natürlichen Vielfachen von $\mathfrak{e}$ und kleiner als $\aleph_0\mathfrak{e}$ ist, oder daß eine transfinite KZ zwischen diesen Grenzen existiert (vgl. das die letztere Möglichkeit dartuende Beispiel $\mathfrak{G}_X^{(A)}$ beim Beweis der Unabhängigkeit von Ax. X, S. 170 f.). Läßt man etwaige solche finite oder transfinite KZen $< \aleph_0\mathfrak{e}$ außer acht, so erweisen sich, wie nachstehend gezeigt wird, die Axiome I—IX als befriedigt; daraus folgt dann im Sinne des Ax. X, daß jene Beschränkung notwendig ist und also insbesondere $\aleph_0\mathfrak{e}$ *die kleinste transfinite KZ darstellt.*

In der Tat ergibt zunächst die (stets zulässige) Addition einer endlichen oder abgezählten Menge von KZen aus dem System $(0, n\mathfrak{e}$ [52]), $\aleph_0\mathfrak{e})$ stets wieder eine KZ aus diesem System, wie namentlich aus Satz 7 (S. 177) und Beziehung (4) (S. 182) folgt. Die Multiplikation einer endlichen Menge von KZen, die sämtlich natürliche Vielfache der Einheit sind, führt, wie sich aus den Axiomen VIII und IX auf Grund vollständiger Induktion (vgl. S. 175) ergibt, in bekannter Weise wieder zu KZen dieser nämlichen Form; man kann nämlich die Produkte als Summen von lauter zu $\mathfrak{e}$ gleichen Summanden gewinnen. Kommen unter den endlich vielen Faktoren auch Nullen vor, so sind jene einzelnen Summanden nicht mehr gleich $\mathfrak{e}$, sondern gleich gewissen Produkten aus endlich vielen Faktoren $\mathfrak{e}$ und endlich vielen Faktoren 0, von denen nach Ax. IX die ersteren weggelassen werden können; die Durchführung der auf S. 181 angestellten Betrachtung für das Produkt über eine *endliche* (statt abgezählte) Menge von zu $\mathfrak{S}(\mathfrak{e}, 0)$ gleichen Faktoren zeigt aber, daß das Produkt einer endlichen Menge von zu Null gleichen Faktoren seinerseits gleich Null ist. Das nämliche besagt (2) auf S. 181 für das Produkt einer abgezählten Menge von zu Null gleichen Faktoren. Fügt man die Aussage von Ax. IX diesen Ergebnissen hinzu, so erkennt man, daß das Produkt einer abgezählten Menge, deren KZen teils der Null, teils der Einheit gleich sind und die mindestens eine der Null gleiche KZ enthält, stets gleich Null ist.

[51]) Will man Ax. X in dem auf S. 181 angedeuteten Sinne heranziehen, so bedarf man ersichtlich der hier zu Satz 10 führenden Überlegungen überhaupt nicht.

[52]) n bedeutet hier und im folgenden stets eine beliebige natürliche Zahl.

Es erübrigt also nur mehr, unter den Summen und Produkten end-ıer oder abgezählter Mengen von zu 0, $n\mathfrak{e}$ oder $\aleph_0\mathfrak{e}$ gleichen KZen die-igen Produkte zu betrachten, deren Faktorenmenge eine abgezählte ılmenge von Faktoren $> \mathfrak{e}$ enthält. Dabei werde zunächst angenommen, 3 kein Faktor gleich 0 ist. Da nach Ax. IX etwaige zu $\mathfrak{e}$ gleiche Fak-en vernachlässigt werden dürfen, so ist jedes in Frage kommende Pro-kt nach Satz 9 gleich oder größer als ein Produkt über eine abgezählte nge von lauter zu $2\mathfrak{e}$ gleichen Faktoren. Ein solches Produkt ist aber ch (3) auf S. 182 gleich oder größer als $\aleph_0\mathfrak{e}$. Ferner *läßt sich jedes che Produkt als eine Summe von lauter zu* $\mathfrak{e}^{\aleph_0} = \mathfrak{e}$ *gleichen Sum-nden darstellen*; dies folgt vermöge Ax. VIII daraus, daß das nämliche n $n\mathfrak{e}$ und $\aleph_0\mathfrak{e}$ gilt. Der Bereich all dieser der Einheit gleichen Sum-nden braucht nicht mehr aus einer unmittelbaren Menge (Def. 1) da-rch hervorzugehen, daß deren KZen sämtlich durch die KZ $\mathfrak{e}$ ersetzt rden; da aber nach Ax. VIII die Summe aller KZen jenes Bereiches istiert, so stellt er nach Def. 2 eine mittelbare Menge dar.

Kommt endlich in der abgezählten Menge, deren Produkt gebildet rden soll, mindestens *eine* der Null gleiche KZ vor, so kann man das mliche Verfahren einschlagen; man stelle hierbei zur Anwendung von . VIII die Null einfach gemäß Ax. I als $0 = \mathfrak{S}0$ dar (was nach Satz 3 ch eine vollständige additive Zerlegung im Sinne von S. 162 ist). Während vorigen Fall jeder Summand der Summe, als die sich nach Ax. VIII das untersuchende Produkt darstellen läßt, gleich $\mathfrak{e}^{\aleph_0} = \mathfrak{e}$ war, ist nunmehr ler Summand gleich dem Produkt über eine abgezählte Menge, von deren Zen mindestens eine gleich Null ist, während die übrigen teils der Ein-t, teils der Null gleich sind. Nach S. 184 ist also jeder Summand der zt betrachteten Summe gleich Null. Um zu erkennen, daß auch die mme all dieser Summanden gleich Null ist, ersetze man in dem be-chteten Produkt jeden Faktor $n\mathfrak{e}$ (n natürliche Zahl) durch $n0 (= 0)$, len Faktor $\aleph_0\mathfrak{e}$ durch $\aleph_0 0$ $(= 0$ nach (4) auf S. 182); dann erhält man rch Anwendung von Ax. VIII dieselbe Summe wie aus dem zunächst trachteten Produkt, nur daß nunmehr jeder Summand gleich $0^{\aleph_0}$, also ch (2) auf S. 181 wiederum gleich Null ist. Da das zweite Produkt in ner ursprünglichen Form nach der nämlichen Beziehung (2) gleich Null , so gilt dasselbe von dem ersten; man erhält also:

Satz 11. *Die Addition wie auch die Multiplikation über eine end-he oder abgezählte Menge von KZen, die keine von* 0, *den natürlichen elfachen der Einheit* $\mathfrak{e}$ *und der transfiniten KZ* $\aleph_0\mathfrak{e}$ *verschiedene KZ thält, ergibt als Summe bzw. Produkt entweder eine der angeführten Zen*[53]) *oder eine transfinite KZ, die zwar größer ist als* $\aleph_0\mathfrak{e}$, *aber auch*

[53]) Bei der Addition tritt stets dieser erste Fall ein.

ihrerseits als eine Summe von lauter zu $\mathfrak{e}$ *gleichen Summanden dargestellt werden kann. Insbesondere ergibt die Addition dann und nur dann die Summe Null, wenn sämtliche Summanden gleich Null sind, die Multiplikation dann und nur dann das Produkt Null, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist.*

Schließlich soll noch untersucht werden, zu welchen Ergebnissen die Addition und Multiplikation *beliebiger* Mengen von *beliebigen* KZen führt. KZen, die von den schon bisher erhaltenen KZen verschieden sind, können als Summanden oder Faktoren hierbei nur insoweit in Frage kommen, als sie selbst durch Addition oder Multiplikation (oder etwa auf Grund von Ax. II) aus schon bekannten KZen hervorgehen; denn die Zulassung weiterer KZen würde mit dem Beschränktheitsaxiom X im Widerspruch stehen. Es ist leicht einzusehen, daß man auf jenem Weg — abgesehen von den bisher erhaltenen KZen $0, \mathfrak{e}, 2\mathfrak{e}, \ldots \aleph_0\mathfrak{e}$ — nur zu KZen gelangen kann, die *größer sind als* $\aleph_0\mathfrak{e}$ und sich gleich dieser KZ als Summen von lauter der Einheit gleichen Summanden darstellen lassen.

Dies leuchtet zunächst ein für den Fall, daß die KZen der vorgelegten Menge alle von Null verschieden sind; für die Addition folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition von $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ und dem assoziativen Gesetz[54]), während für die Multiplikation noch Ax. VIII hinzugenommen werden muß, das das Produkt in eine Summe verwandelt (und in diesem Fall das vollkommene Analogon der in der Mengenlehre üblichen Produktdefinition darstellt). Sollte man hierbei zu einer KZ $\mathfrak{g}$ gelangen, die größer ist als $\aleph_0\mathfrak{e}$, so kann man ein neues Symbol, z. B. $\aleph$, wählen und $\mathfrak{g}$ (sowie alle ihr gleichen KZen) durch $\aleph\mathfrak{e}$ bezeichnen (wie Entsprechendes vorher für die natürlichen Vielfachen von $\mathfrak{e}$ und für $\aleph_0\mathfrak{e}$ geschah); jeder Klasse von untereinander gleichen KZen wird auf diese Weise ein solches Symbol zugeordnet.

Es ist also nur mehr der Fall zu behandeln, daß auch der Null gleiche Summanden bzw. Faktoren auftreten. Ist $\mathfrak{B}$ eine *beliebige* Menge von KZen (d. h. nach Def. 2 und Ax. I ein beliebiger Bereich von KZen von der Eigenschaft, daß $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ existiert) und $\mathfrak{B}_0$ die Menge, die aus $\mathfrak{B}$ hervorgeht, wenn jede KZ von $\mathfrak{B}$ durch Null ersetzt wird, so ist vor allem $\mathfrak{S}\mathfrak{B}_0 = 0$. Man erkennt dies durch das nämliche Verfahren, das oben (S. 181 f., (1)–(4)) zum Beweis der Relation $\aleph_0\mathfrak{e} = 0$ angewandt wurde; denn die dortige Beweismethode ist ersichtlich nicht davon abhängig, daß die betrachtete Menge abgezählt ist. Es sind also bei der Addition, wie die Anwendung des assoziativen und kommutativen Gesetzes zeigt,

[54]) Die *Existenz* der in Frage kommenden Summen von lauter der Einheit gleichen Summanden läßt sich in naheliegender Weise aus der Existenz gewisser durch Ax. VIII gesicherter Summen erschließen.

der Null gleichen Summanden einfach zu vernachlässigen; *die Null für die Addition unbeschränkt in der nämlichen Weise neutral wie Einheit (nach Ax. IX) für die Multiplikation.*

Es enthalte wiederum die Menge $\mathfrak{B}$ mindestens eine der Null gleiche KZ. zu beweisen, daß dann stets $\mathfrak{P}\mathfrak{B} = 0$, wähle man für jede von Null chiedene KZ von $\mathfrak{B}$ eine additive Zerlegung, bei der jeder Summand Einheit gleich ist; dann wird $\mathfrak{P}\mathfrak{B}$ nach Ax. VIII gleich einer Summe Produkten, deren jedes ausschließlich Faktoren enthält, die teils gleich eils (so für mindestens einen Faktor) gleich Null sind. Aus Ax. IX der im vorigen Absatz angedeuteten Ausdehnung der Beziehung (2) 81) auf eine beliebige Menge von zu Null gleichen Faktoren ergibt also, daß jedes einzelne Produkt der angegebenen Art gleich Null ist; r gilt nach dem Ergebnis des vorigen Absatzes dasselbe für die Summe ihnen, d. h. für $\mathfrak{P}\mathfrak{B}$.

Zum Schluß ist noch darauf hinzuweisen, daß auch Ax. II nicht die ührung weiterer KZen zu den auf die geschilderte Art erhaltenen er- cht und daß die Einheit $\mathfrak{e}$ (gleich all ihren natürlichen Vielfachen) in Ax. IV geforderte Eigenschaft besitzt, wie es nach Satz 10 auf Grund Hilfssatzes von S. 178 der Fall sein muß. Ersteres ist klar, falls keine KZen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ transfinit ist, und folgt, wenn eine von ihnen sfinit ist, (im Einklang mit Satz 2) aus der Tatsache, daß $\aleph_0\mathfrak{e}$ die ıste transfinite KZ ist (S. 184); denn jede der nicht transfiniten KZen 0 $n\mathfrak{e}$ ist kleiner als $\aleph_0\mathfrak{e}$. Aus $\mathfrak{S}(\mathfrak{e}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{e}, \mathfrak{b})$ folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ sicher, n $\mathfrak{a}$ gleich Null oder einer finiten KZ, d. h. einem natürlichen Viel- en von $\mathfrak{e}$ ist; da $\aleph_0\mathfrak{e}$ die kleinste transfinite KZ ist, so ergibt sich der nach Satz 6 bestehenden Beziehung $\mathfrak{S}(\aleph_0\mathfrak{e}, \mathfrak{e}) = \aleph_0\mathfrak{e}$ für jede sfinite KZ $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}, \mathfrak{e}) = \mathfrak{a}$ und damit allgemein die fragliche Eigen- ft der Einheit.

Schon in § 1 (S. 163, Fußnote 29) wurde darauf hingewiesen, daß die igkeit des Ax. VIII für „vollständige additive Zerlegungen", die vor- end zur *Definition* der Multiplikation benutzt wurde und daher ge- ert ist, seine *Allgemein*gültigkeit nach sich zieht. Ferner genügt der mehr erhaltene Bereich $\mathfrak{G}$ von KZen auch dem Beschränktheitsaxiom X. n wie unschwer ersichtlich, enthalten nur solche Teilbereiche von $\mathfrak{G}$ finite KZ, in denen ein natürliches Vielfaches von $\mathfrak{e}$ vorkommt; wegen IX muß daher $\mathfrak{e}$ selbst, wegen Ax. II die Null in $\mathfrak{G}$ enthalten sein. übrigen KZen von $\mathfrak{G}$ ergeben sich aber vermöge der Axiome I, VII, und VIII, von denen die beiden letzten die erforderliche Ausdehnung Mengenbegriffs liefern[55]). Endlich folgt aus der Darstellbarkeit jeder

[55]) Ausführlicher soll auf diese Fragen in der Fortführung des gegenwärtigen Auf- s eingegangen werden.

von Null verschiedenen KZ als Summe von lauter der Einheit gleich
Summanden ganz in der auch in der Mengenlehre üblichen Weise, daß d
Multiplikation allgemein assoziativ und kommutativ ist. Es gilt also:

Satz 12. *Jeder Bereich* $\mathfrak{G}$, *der den Axiomen* $I-X$ *genügt, enth*
eine für die Addition unbeschränkt neutrale KZ 0 (*Null*), *eine* (*gem*
Ax. IX) *für die Multiplikation unbeschränkt neutrale, finite und Ax. I*
befriedigende KZ $\mathfrak{e}$ (*Einheit*), *ferner deren — untereinander sämtli*
verschiedene und durchwegs finite — natürliche Vielfache $\mathfrak{S}(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}) = 2$
$\mathfrak{S}(2\mathfrak{e}, \mathfrak{e}) = 3\mathfrak{e}$ *usw. und eine kleinste transfinite KZ* $\aleph_0\mathfrak{e} = \mathfrak{S}(\mathfrak{e}, 2\mathfrak{e}, 3\mathfrak{e}, \ldots$
endlich die durch Addition und Multiplikation gemäß den Axiomen a
ihnen hervorgehenden transfiniten KZen. Jede von Null verschiedene K
von $\mathfrak{G}$ *läßt sich als eine Summe darstellen, deren Summanden sämtli*
gleich $\mathfrak{e}$ *sind. Die Multiplikation in* $\mathfrak{G}$ *ist assoziativ und kommutativ. Jed*
solche Bereich $\mathfrak{G}$ *ist der kleinste die Axiome* $I-IX$ *befriedigende Te*
bereich von sich selbst und insofern eindeutig bestimmt[56]). *Sind* $\mathfrak{G}_1$ *u*
$\mathfrak{G}_2$ *zwei dem Axiomensystem genügende Bereiche,* $\mathfrak{e}_1$ *und* $\mathfrak{e}_2$ *ih*
Einheiten, $\overline{\mathfrak{G}}_1$ *und* $\overline{\mathfrak{G}}_2$ *die Teilbereiche von* $\mathfrak{G}_1$ *und* $\mathfrak{G}_2$, *die die KZen en*
halten, welche gleich oder kleiner als $\aleph_0\mathfrak{e}_1$ *bzw.* $\aleph_0\mathfrak{e}_2$ *sind, so sind* $\overline{\mathfrak{G}}_1$ *u*
$\overline{\mathfrak{G}}_2$ (*bei Zuordnung der Einheiten* $\mathfrak{e}_1$ *und* $\mathfrak{e}_2$) *in bezug auf die in beid*
Teilbereichen ausführbaren Additionen und Multiplikationen holoedris
isomorph.

---

[56]) Der Bereich $\mathfrak{G}$ hängt aber, wenn man ihn in bezug auf die Klassen von unte
einander gleichen KZen betrachtet, noch von der Natur der Addition (und dan
auch der Multiplikation) ab; z. B. kann $(2\mathfrak{e})^{\aleph_0} = \aleph_0\mathfrak{e}$ oder $> \aleph_0\mathfrak{e}$ sein. Insbesonde
kann es sein, daß alle transfiniten KZen gleich $\aleph_0\mathfrak{e}$ sind, oder $\mathfrak{G}$ kann in bezug a
beide Operationen dem Bereich der KZen der gewöhnlichen Mengenlehre holoedris
isomorph sein.

(Eingegangen am 15. Januar 1921.)

Kurven auf algebraischen Flächen.

Von

Heinrich W. E. Jung in Halle a. d. Saale.

Einleitung.

Die Formeln, die dazu dienen, die stationären Elemente von Kurven l abwickelbaren Flächen zu bestimmen, sollen in dieser Arbeit in eine rm gebracht werden, die ihre bequeme Anwendung auf Kurven gestatten, auf einer Fläche liegen, und auf abwickelbare Flächen, die einer Fläche schrieben sind. Zum Schluß folgen einige Anwendungen. Weitere Anndungen gedenke ich in besonderen Arbeiten zu geben.

I. Kurven und abwickelbare Flächen.

Zunächst seien die Formeln zusammengestellt, die in eine für unsere ecke passende Form gebracht werden sollen[1]).

1. Raumkurven.

Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ vier äquivalente teilerfremde ganze Divisoren es algebraischen Körpers $\mathfrak{P}$ einer Veränderlichen. Wir setzen, unter $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ Konstanten verstehend,

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_0 = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \lambda_3 \mathfrak{a}_3 + \lambda_4 \mathfrak{a}_4, \\ \xi_\alpha = \dfrac{\mathfrak{a}_\alpha}{\mathfrak{a}_0}. \end{cases}$$

ssen wir die ξ_α als homogene Punktkoordinaten eines Punktes (ξ) auf, bildet die Gesamtheit dieser Punkte (ξ) eine algebraische Kurve. Wir mmen an, daß jeder Stelle dieser Kurve auch eine Stelle des Körpers $\mathfrak{P}$ spricht und bezeichnen die Kurve auch mit $\mathfrak{P}$. Ist $\mathfrak{p}$ eine Stelle von

[1]) Wegen der Beweise sei verwiesen auf: Hensel-Landsberg, Theorie der ebraischen Funktionen einer Variablen. Teubner 1902, 27. Vorlesung, S. 460ff.; nsel, Über die Invarianten algebraischer Körper, Journ. f. Math. 149 (1919), 125—146.

$\mathfrak{P}$ und τ eine Größe, die dort von der ersten Ordnung Null wird, so sind in der Umgebung von $\mathfrak{p}$ die ξ_α in der Form darstellbar

$$\xi_\alpha = \tau^{-\nu}\, \mathfrak{a}_\alpha(\tau),$$

wo ν eine ganze nicht negative Zahl und wo die $\mathfrak{a}_\alpha(\tau)$ gewöhnliche Potenzreihen von τ sind, die nicht alle für $\tau = 0$ verschwinden. Wir setzen dann noch $\mathfrak{a}_0 = \tau^\nu$ und nennen die $\mathfrak{a}_\alpha(\tau)$ die zugeordneten Funktionen der Divisoren $\mathfrak{a}_\alpha$ für die Stelle $\mathfrak{p}$. Diese sollen nicht vollständig bestimmt sein, sondern es soll gestattet sein, sie mit einem gemeinsamen Faktor z multiplizieren, der eine Einheit für die Stelle $\mathfrak{p}$ ist, d. h. eine gewöhnliche Potenzreihe von τ, die für $\tau = 0$ nicht verschwindet. Es sind also die $\mathfrak{a}$ und ebenso die später vorkommenden ganzen Divisoren nicht nur Symbole, sondern an jeder Stelle gewöhnliche Potenzreihen einer an dieser Stelle von erster Ordnung verschwindenden Größe.

Die im folgenden auftretenden Differentialausdrücke haben infolgedessen an jeder Stelle $\mathfrak{p}$ eine Bedeutung und sind durch eine ganz bestimmte Potenz des zur Stelle $\mathfrak{p}$ gehörenden Primteilers $\mathfrak{p}$ teilbar. Dabei gilt das Differential $d\tau$ als Einheit für die Stelle $\mathfrak{p}$, wenn τ von der ersten Ordnung in $\mathfrak{p}$ verschwindet. Es werden also durch die Differentialausdrücke ganz bestimmte Divisoren definiert und diese sind deshalb von besonderer Bedeutung, weil die Differentialausdrücke Differentialinvarianten sind.

Es seien $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$ die Divisoren der stationären Punkte, Geraden und Ebenen von $\mathfrak{P}$. Es bestehen dann folgende Gleichungen

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathfrak{a}_\alpha d\,\mathfrak{a}_\beta - \mathfrak{a}_\beta d\,\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{d}_1 \mathfrak{a}_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

$$\eta_\delta = |\,\mathfrak{a}_\alpha,\ d\,\mathfrak{a}_\beta,\ d^2\mathfrak{a}_\gamma\,| = \mathfrak{d}_1^2 \mathfrak{d}_2 \mathfrak{a}'_\delta, \tag{3}$$

$$\eta = |\,\mathfrak{a}_1,\ d\,\mathfrak{a}_2,\ d^2\mathfrak{a}_3,\ d^3\mathfrak{a}_4\,| = \mathfrak{d}_1^3 \mathfrak{d}_2^2 \mathfrak{d}_3, \tag{4}$$

wo die $\mathfrak{a}_{\alpha\beta}$ und ebenso die $\mathfrak{a}'_\alpha$ ganze Divisoren ohne gemeinsamen Teiler sind. Die $\mathfrak{a}_{\alpha\beta}$ sind die Linienkoordinaten der Geraden von $\mathfrak{P}$ und die $\mathfrak{a}'_\alpha$ die Ebenenkoordinaten der Ebenen von $\mathfrak{P}$. Die Ordnungen von $\mathfrak{a}_\alpha$, $\mathfrak{a}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{a}'_\alpha$, $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$ seien n_1, n_2, n_3; w_1, w_2, w_3. Es sind n_1, n_2, n_3 gleich Ordnung; Rang, Klasse von $\mathfrak{P}$.

2. Abwickelbare Flächen.

Die Ebenen der Kurve $\mathfrak{P}$ hüllen eine abwickelbare Fläche $\mathfrak{P}'$ ein, deren Gratlinie $\mathfrak{P}$ ist. Die Punkte, Geraden und Ebenen von $\mathfrak{P}$ heißen auch Punkte, Geraden und Ebenen von $\mathfrak{P}'$, wobei das Wort Punkt in prägnantem Sinne gebraucht ist. Statt von den Punkten auszugehen, kann man auch von den Ebenen ausgehen. Wir erhalten dann dual zu Nr. 1 folgende Gleichungen:

$$\eta'_{\alpha\beta} = a'_\alpha d\,a_\beta - a'_\beta d\,a'_\alpha = \delta_3\, a'_{\alpha\beta} = \delta_2\, a_{\gamma\delta},$$

$$\eta'_\delta = |a'_\alpha,\ d\,a_\beta,\ d^2 a'_\gamma| = \delta_3^2\, \delta_2\, a_\delta,$$

$$\eta' = |a'_1,\ d\,a'_2,\ d^2 a'_3,\ d^3 a'_4| = \delta_3^3\, \delta_2^2\, \delta_1.$$

Es ist dann und nur dann identisch

$$\begin{cases} \delta_1 = 0, & \text{wenn } \mathfrak{P} \text{ in einen Punkt kondensiert, also } \mathfrak{P}' \text{ ein Kegel ist,} \\ \delta_2 = 0, & \text{wenn } \mathfrak{P} \text{ eine Gerade, also } \mathfrak{P}' \text{ ein Ebenenbüschel,} \\ \delta_3 = 0, & \text{wenn } \mathfrak{P} \text{ eine ebene Kurve, also } \mathfrak{P}' \text{ in eine Ebene kondensiert ist.} \end{cases}$$

Aus (2) bis (7) ergeben sich durch Vergleichen der Ordnungen der ivisoren links und rechts folgende sechs Plückerschen Gleichungen, von enen drei unabhängig sind,

$$\begin{cases} 2p-2 = w_1 + n_2 - 2n_1, & 3(2p-2) = 2w_1 + w_2 + n_3 - 3n_1, \\ & 6(2p-2) = 3w_1 + 2w_2 + w_3 - 6n_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2p-2 = w_3 + n_2 - 2n_3, & 3(2p-2) = 2w_3 + w_2 + n_1 - 3n_3, \\ & 6(2p-2) = 3w_3 + 2w_2 + w_1 - 6n_3. \end{cases}$$

3. Mehrfache Kurven.

Es mögen einer Stelle der Kurve der Punkte (ξ) μ im allgemeinen erschiedene Stellen des Körpers $\mathfrak{P}$ entsprechen. Wir bezeichnen die Kurve it $\mathfrak{P}_0$. Es ist dann $\mathfrak{P}$ ein Körper vom Relativgrade μ über dem Körper $_0$, der durch die Kurve definiert wird. Jeder Primteiler von $\mathfrak{P}_0$ zerfällt $\mathfrak{P}$ in μ Primteiler, so daß die Ordnung eines Divisors von $\mathfrak{P}_0$ μ-mal groß wird, wenn wir ihn als Divisor von $\mathfrak{P}$ auffassen.

Es sei δ der Verzweigungsdivisor von $\mathfrak{P}$ in bezug auf $\mathfrak{P}_0$. Die in n Nrn. 1 und 2 definierten Divisoren und Zahlen sollen sich wieder auf e Kurve der Punkte (ξ), also auf $\mathfrak{P}_0$ beziehen. Dann ist jetzt im Körper $\mathfrak{P}$

$$\eta_{\alpha\beta} = \delta_1\, \delta\, a_{\alpha\beta}, \qquad \eta_\alpha = \delta_1^2\, \delta_2\, \delta^3\, a'_\alpha, \qquad \eta = \delta_1^3\, \delta_2^2\, \delta_3\, \delta^6.$$

Der hier betrachtete Fall tritt z. B. ein, wenn die Kurve $\mathfrak{P}_0$ eine fache Kurve einer algebraischen Fläche F ist. Die Verzweigungsstellen n $\mathfrak{P}$ in bezug auf $\mathfrak{P}_0$ sind dann die Stellen, wo zwei oder mehrere der durch $\mathfrak{P}_0$ gehenden Blätter von F analytisch zusammenhängen. Ist $= 2$, so sind es die Kniffpunkte der Doppelkurve. Der Körper $\mathfrak{P}$ kann rigens zerfallen.

Dual entsprechende Überlegungen gelten für diejenigen einer Fläche F ıschriebenen abwickelbaren Flächen, deren Ebenen F mehrfach berühren.

4. Ebene Kurven und Kegel.

Es sei ähnlich wie in Nr. 1

$$\xi_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad \xi_2 = \frac{a_2}{a_0}, \quad \xi_3 = \frac{a_3}{a_0}, \tag{12}$$

wo die a_i ganze, teilerfremde, äquivalente Divisoren eines algebraischen Körpers $\mathfrak{P}$ sein sollen. Wir nehmen an, daß der Körper der rationalen homogenen Funktionen der ξ_i mit $\mathfrak{P}$ identisch ist. Wir deuten die ξ_i als homogene Punktkoordinaten eines Raumes, indem wir noch eine vierte Koordinate ξ_4 hinzufügen. Nehmen wir $\xi_4 = 0$ an, so definieren die Punkte (ξ) eine in der Ebene 4 des Koordinatentetraeders liegende ebene Kurve. Lassen wir ξ_4 unbestimmt, so bilden die Punkte (ξ) einen Kegel, dessen Spitze die Ecke 4 des Koordinatentetraeders ist. Wir bezeichnen die Kurve mit $\mathfrak{P}$, den Kegel mit $\mathfrak{P}'$.

Sind $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ die Divisoren der stationären Punkte und Tangenten von $\mathfrak{P}$ oder der stationären Kanten und Ebenen von $\mathfrak{P}'$, so ist

$$\eta_\alpha = a_\beta d a_\gamma - a_\gamma d a_\beta = \mathfrak{d}_1 a'_\alpha, \tag{13}$$

$$\eta = |a_1, \; d a_2, \; d^2 a_3| = \mathfrak{d}_1^2 \mathfrak{d}_2. \tag{14}$$

Wir setzen, unter $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ irgendwelche Konstanten verstehend,

$$a'_0 = \lambda'_1 a'_1 + \lambda'_2 a'_2 + \lambda'_3 a'_3, \quad \xi'_\alpha = \frac{a'_\alpha}{a'_0}. \tag{15}$$

Die ξ'_α sind die Linienkoordinaten der Geraden von $\mathfrak{P}$ oder die Ebenenkoordinaten der Ebenen von $\mathfrak{P}'$. Dual zu (13), (14) bestehen die Gleichungen

$$\eta'_\alpha = a'_\beta d a'_\gamma - a'_\gamma d a'_\beta = \mathfrak{d}_2 a_\alpha, \tag{16}$$

$$\eta' = |a'_1, \; d a'_2, \; d^2 a'_3| = \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2^2. \tag{17}$$

Sowohl zwischen den ξ_i wie zwischen den ξ'_i besteht eine irreduzible algebraische Gleichung. Diese seien $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ und $f'(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3) = 0$. Dann ist für die Umgebung jeder Stelle identisch

$$f(a_1, a_2, a_3) = 0, \quad f'(a'_1, a'_2, a'_3) = 0. \tag{18}$$

Bezeichnen wir die ersten Ableitungen durch Hinzufügen der Indizes 1, 2, 3, so bestehen die Gleichungen

$$f_k(a) = \mathfrak{m} \mathfrak{d}_1 a'_k = \mathfrak{m}_0 \mathfrak{d}_1^3 a'_k, \quad f'_k(a') = \mathfrak{m}' \mathfrak{d}_2 a_k = \mathfrak{m}'_0 \mathfrak{d}_2^3 a_k. \tag{19}$$

Die hierdurch definierten Divisoren $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}', \mathfrak{m}'_0$ sind ganz. Es ist $\mathfrak{m}$ der Divisor der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$ oder der mehrfachen Kanten von $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{m}'$ ist der Divisor der mehrfachen Geraden von $\mathfrak{P}$ oder der mehrfachen Ebenen von $\mathfrak{P}'$.

Die Ordnungen von $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{m}, \mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}', \mathfrak{m}_0', \mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{a}_\alpha'$ seien $w_1, w_2, m, m_0, m_0', n_1, n_2$. Es ist n_1 die Ordnung und n_2 die Klasse von $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}'$. ch Gleichsetzen der Ordnungen der Divisoren auf beiden Seiten der chungen (13) bis (17), (19) folgt

$$\begin{cases} 2p-2 = w_1 + n_2 - 2n_1, & 3(2p-2) = 2w_1 + w_2 - 3n_1, \\ 2p-2 = w_2 + n_1 - 2n_2, & 3(2p-2) = 2w_2 + w_1 - 3n_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1(n_1-1) = 2m + w_1 + n_2 = 2m_0 + 3w_1 + n_2, \\ n_2(n_2-1) = 2m' + w_2 + n_1 = 2m_0' + 3w_2 + n_1, \end{cases}$$

denen unter anderem folgt

$$2p-2 = n_1(n_1-3) - 2m = n_2(n_2-3) - 2m'.$$

Kurven auf einer algebraischen Fläche F und ihr umschriebene abwickelbare Flächen.

Im folgenden benutze ich öfter meine Arbeit: Über die Differential- arianten algebraischer Flächen[2]), die ich mit D zitiere.

1. Die Fläche F und ihre Kurven.

Die Fläche F sei definiert wie in D, S. 183. Die Koordinaten x_α s Punktes (x) und die Koordinaten x_α' einer Ebene (x') von F seien gegeben in der Form

$$x_\alpha = \frac{\mathfrak{A}_\alpha}{\mathfrak{A}_0}, \qquad x_\alpha' = \frac{\mathfrak{A}_\alpha'}{\mathfrak{A}_0'} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

die $\mathfrak{A}_i$ und ebenso die $\mathfrak{A}_i'$ ganze teilerfremde äquivalente Divisoren e gemeinsame Nullstellen eines algebraischen Körpers T von zwei Ver- erlichen sein sollen. Jedem Primteiler $\mathfrak{P}$ (erster Stufe) erster Art lassen auf F eine Kurve $\mathfrak{P}$ entsprechen, so daß jede Kurve an jeder Stelle, ch die sie geht, eine zugeordnete Funktion $\mathfrak{P}(u, v)$ hat, die längs der ve $\mathfrak{P}$ verschwindet. Folgende vier Arten von Kurven sind zu unter- iden:

a) Längs der Kurve $\mathfrak{P}$ sind weder die Verhältnisse der $\mathfrak{A}_i$ noch die $\mathfrak{A}_i'$ konstant.

b) Längs $\mathfrak{P}$ sind die Verhältnisse der $\mathfrak{A}_i$ konstant, nicht aber die der $\mathfrak{A}_i'$.

c) Längs $\mathfrak{P}$ sind die Verhältnisse der $\mathfrak{A}_i'$ konstant, nicht aber die der $\mathfrak{A}_i$.

d) Längs $\mathfrak{P}$ sind sowohl die Verhältnisse der $\mathfrak{A}_i$ wie die der $\mathfrak{A}_i'$ konstant.

Im Falle b) ist $\mathfrak{P}$ in einen Punkt H kondensiert, aber die Berührungs- ien von F in den Stellen von $\mathfrak{P}$ sind veränderlich. Sie bilden einen

[2]) Diese Zeitschr. 8, S. 182–221.

Kegel, den Berührungskegel von F in dem singulären Punkte H. W nennen $\mathfrak{P}$ eine *Punktkurve*.

Im Falle c), der dual zu b) ist, fallen die Berührungsebenen, die in den Stellen von $\mathfrak{P}$ hat, zusammen. Die F längs $\mathfrak{P}$ umschriebene ab wickelbare Fläche ist in eine Ebene kondensiert, die F längs $\mathfrak{P}$ berühr Wir nennen $\mathfrak{P}$ eine *Ebenenkurve*.

Im Falle d) ist $\mathfrak{P}$ gleichzeitig Punkt- und Ebenenkurve.

Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zwei Kurven von F, so verstehen wir unte $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{P})$ die Zahl ihrer Schnittpunkte. Ist $\mathfrak{P}$ eine Primkurve, k können wir $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ auch in folgender Weise definieren. Jede Kurve $\mathfrak{L}$ die $\mathfrak{P}$ nicht enthält, geht für $\mathfrak{P} = 0$ in einen ganz bestimmten Divisor des Körpers $\mathfrak{P}$ über. Da äquivalente Kurven in äquivalente Divisore übergehen, so geht jede Klasse $(\mathfrak{Q})$ in eine Klasse (q) des Körpers über für $\mathfrak{P} = 0$. Und es ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ die Ordnung der Klasse (q). E hat nach dieser Definition $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ auch einen Sinn, wenn $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{Q}$ ent halten ist. Ist $\mathfrak{P}$ kein Primteiler, sondern etwa $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1^{p_1} \mathfrak{P}_2^{p_2} \ldots \mathfrak{P}_\nu^{p_\nu}$, wo die $\mathfrak{P}_i$ Primteiler sind, so setzt man

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = p_1 (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}) + \cdots + p_\nu (\mathfrak{P}_\nu, \mathfrak{Q}).$$

Es gelten die Sätze

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}),$$
$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}'),$$

wenn $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{Q}'$.

Man vgl. hierzu meine Arbeit: Zur Theorie der Kurvenscharen au einer algebraischen Fläche. Journ. f. Math. **138**, S. 77—95.

2. Kurven auf F.

Es sei $\mathfrak{P}$ eine Primkurve auf der Fläche F. Wir bezeichnen mit ξ die Koordinaten eines Punktes (ξ) von $\mathfrak{P}$, mit y_a die irgendeines Raum punktes (y) und, wie schon angegeben, mit x_a die eines Punktes (x) von F.

Ferner sei $G(y) = 0$ die Gleichung irgendeiner von F verschiedenen irreduziblen Fläche G, die durch $\mathfrak{P}$ geht, so daß für die Umgebung irgend einer Stelle S, durch die $\mathfrak{P}$ geht,

$$G(\mathfrak{A}) = G(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4) = \mathfrak{P}^a(u, v)\, \mathfrak{G}(u, v), \tag{2}$$

wo $a > 0$ und wo $\mathfrak{G}(u, v)$ eine durch $\mathfrak{P}(u, v)$ nicht teilbare gewöhnliche Potenzreihe von u, v ist. Es ist $\mathfrak{G}$ die zugeordnete Funktion der Kurve, in der die Fläche G die Fläche F außer in $\mathfrak{P}$ noch schneidet. Die Ord nung von G sei g.

Zur Abkürzung sei gesetzt

$$\frac{\partial G(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}_k} = G_k(\mathfrak{A}) = G_k. \tag{3}$$

s (2) folgt

$$\sum G_k \mathfrak{A}_k = gG = g\mathfrak{P}^a\mathfrak{G},$$

$$\sum G_k \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial u} = a\mathfrak{P}^{a-1}\mathfrak{G}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} + \mathfrak{P}^a\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u},$$

$$\sum G_k \frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial v} = a\mathfrak{P}^{a-1}\mathfrak{G}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} + \mathfrak{P}^a\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v}.$$

diesen Gleichungen nehmen wir noch folgende hinzu, in der wir unter $, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ unbestimmte Konstanten verstehen,

$$\sum G_k \mu_k = \mu,$$

μ durch diese Gleichung definiert sein soll. Aus (4) bis (7) folgt rch Auflösen nach G_1 unter Beachtung von D, S. 184, (5) und (6)

$$G_1 \cdot \Re \sum \mu_k \mathfrak{A}'_k = \begin{vmatrix} \mu & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ 0 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ a\mathfrak{P}^{a-1}\mathfrak{G}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial u} \\ a\mathfrak{P}^{a-1}\mathfrak{G}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v} \end{vmatrix} + (a),$$

unter (a) Summanden zu verstehen sind, die mindestens durch $\mathfrak{P}^a$ lbar sind. Diese Gleichung ist identisch in den μ_α. Vergleichen wir ks und rechts den Faktor von μ_2, so erhalten wir

$$\Re\{\mathfrak{A}'_1 G_2 - \mathfrak{A}'_2 G_1\} = a\mathfrak{P}^{a-1}\mathfrak{G}\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v} \end{vmatrix} + (a).$$

ese Gleichung multiplizieren wir mit du. Und zwar multiplizieren wir Determinante der rechten Seite, indem wir die zweite Zeile mit du ltiplizieren. Außerdem addieren wir die mit dv multiplizierte dritte ile der Determinante zur zweiten. Wir erhalten

$$\Re\{\mathfrak{A}'_1 G_2 - \mathfrak{A}'_2 G_1\}du = a\mathfrak{P}^{a-1}\mathfrak{G}\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ d\mathfrak{P} & d\mathfrak{A}_3 & d\mathfrak{A}_4 \\ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v} \end{vmatrix} + (a).$$

achten wir, daß $d\mathfrak{P} = 0$ für $\mathfrak{P} = 0$, so folgt

$$\Re\{\mathfrak{A}'_1 G_2 - \mathfrak{A}'_2 G_1\}du = a\mathfrak{P}^{a-1}\mathfrak{G}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}\{\mathfrak{A}_3 d\mathfrak{A}_4 - \mathfrak{A}_4 d\mathfrak{A}_3\} + (a).$$

r nehmen an, daß $\mathfrak{P}(u, v)$ von v wirklich abhängt, was keine Beränkung ist, da wir ja u mit v vertauschen könnten.

Für $\mathfrak{P}=0$ gehen die x_α in die ξ_α über. Benutzen wir die Bezeichnungen von I, Nr. 1, so haben wir die Divisoren des Körpers $\mathfrak{P}$, in die die $\mathfrak{A}_\alpha$ für $\mathfrak{P}=0$ übergehen, mit $\mathfrak{a}_\alpha$ zu bezeichnen. Diese Divisoren sind, wie es sein muß, teilerfremd, da die $\mathfrak{A}_\alpha$ keine gemeinsame Nullstelle haben (D, Einleitung). Daher folgt aus (8) und (2) wegen I, (2)

$$\text{(I)}\qquad \eta_{\alpha\beta}=\lim_{\mathfrak{P}=0}\left\{\frac{\mathfrak{P}\,\mathfrak{R}}{a\,G(\mathfrak{A})}\cdot\frac{du}{\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}}\left[\mathfrak{A}'_\gamma G_\delta-\mathfrak{A}'_\delta G_\gamma\right]\right\},$$

wo $\alpha\beta\gamma\delta$ eine grade Permutation von 1 2 3 4 ist.

Es ist unter der Annahme $\mathfrak{P}=0$, also $\mathfrak{A}_\alpha=\mathfrak{a}_\alpha$ nach I, (3),

$$\eta_1=|\,\mathfrak{A}_2,\,d\mathfrak{A}_3,\,d^2\mathfrak{A}_4\,|=\eta_{23}d^2\mathfrak{A}_4+\eta_{34}d^2\mathfrak{A}_2+\eta_{42}d^2\mathfrak{A}_3.$$

Setzen wir vorübergehend zur Abkürzung

$$\text{(9)}\qquad \frac{\mathfrak{P}\,\mathfrak{R}}{a\,G(\mathfrak{A})}\cdot\frac{du}{\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}}=\varphi,$$

so folgt wegen (I)

$$\eta_1=\lim_{\mathfrak{P}=0}\left[\varphi\left\{\mathfrak{A}'_1\sum G_k d^2\mathfrak{A}_k-G_1\sum\mathfrak{A}'_k d^2\mathfrak{A}_k\right\}\right]$$

oder wegen D, S. 188, (5) und (6)

$$\text{(II)}\qquad \eta_\alpha=\lim_{\mathfrak{P}=0}\left\{\frac{\mathfrak{P}\,\mathfrak{R}}{a\,G(\mathfrak{A})}\cdot\frac{du}{\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}}\left[\mathfrak{A}'_\alpha\sum G_k d^2\mathfrak{A}_k-G_\alpha Q_2(du,dv)\right]\right\}.$$

Es ist nach I, (4) unter der Annahme $\mathfrak{P}=0$

$$\eta=|\,\mathfrak{A}_1,\,d\mathfrak{A}_2,\,d^2\mathfrak{A}_3,\,d^3\mathfrak{A}_4\,|=\eta_1 d^3\mathfrak{A}_1+\eta_2 d^3\mathfrak{A}_2+\eta_3 d^3\mathfrak{A}_3+\eta_4 d^3\mathfrak{A}_4.$$

Unter Benutzung von (II) und (9) folgt hieraus

$$\text{(10)}\qquad \eta=\lim_{\mathfrak{P}=0}\left[\varphi\left\{\sum\mathfrak{A}'_k d^3\mathfrak{A}_k\cdot\sum G_k d^2\mathfrak{A}_k-Q_2(du,dv)\sum G_k d^3\mathfrak{A}_k\right\}\right].$$

Es ist aber nach D, S. 196, (5), (6) und D, S. 188, (5), (6)

$$\text{(11)}\qquad \begin{cases} Q_3(du,dv)=\sum\mathfrak{A}'_k d^3\mathfrak{A}_k+3\sum d\mathfrak{A}'_k d^2\mathfrak{A}_k,\\ dQ_2(du,dv)=\sum\mathfrak{A}'_k d^3\mathfrak{A}_k+\sum d\mathfrak{A}'_k d^2\mathfrak{A}_k. \end{cases}$$

Daher folgt aus (10) wegen (9)

$$\text{(III)}\qquad \eta=\lim_{\mathfrak{P}=0}\left\{\frac{\mathfrak{P}\,\mathfrak{R}}{a\,G(\mathfrak{A})}\cdot\frac{du}{\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}}\left[\left\{\frac{3}{2}dQ_2(du,dv)-\frac{1}{2}Q_3(du,dv)\right\}\sum G_k d^3\mathfrak{A}_k\right.\right.$$
$$\left.\left.-Q_2(du,dv)\sum G_k d^3\mathfrak{A}_k\right]\right\}.$$

3. Abwickelbare einhüllende Flächen von F.

Es sei wieder $\mathfrak{P}$ eine Primkurve auf F, und $\mathfrak{P}'$ sei die abwickelbare äche, deren Ebenen F in den Stellen von $\mathfrak{P}$ berühren. Es ist $\mathfrak{P}$ im lgemeinen *nicht* die Gratlinie von $\mathfrak{P}'$. Es mögen y_i' die Koordinaten gendeiner Ebene sein, x_i' die Koordinaten einer Ebene von F und die einer Ebene von $\mathfrak{P}'$. Es sei wie in D, S. 185 (2)

2) $$x_\alpha' = \frac{\mathfrak{A}_\alpha'}{\mathfrak{A}_0'}$$

erner sei $G'(\eta') = 0$ die Gleichung einer von F verschiedenen irreduiblen algebraischen Fläche, der auch $\mathfrak{P}'$ umschrieben ist. Es ist dann

3) $$G'(\mathfrak{A}') = \mathfrak{P}^a \mathfrak{G}',$$

o $\mathfrak{G}'$ eine ganze durch $\mathfrak{P}$ nicht teilbare Kurve ist und wo $a > 0$.

Setzen wir zur Abkürzung

4) $$\frac{\partial G'(\mathfrak{A}')}{\partial \mathfrak{A}_k'} = G_k',$$

erhalten wir dual zur vorigen Nummer folgende Gleichungen:

I′) $$\eta_{\alpha\beta}' = \lim_{\mathfrak{P}=0} \left\{ \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}'}{a G'(\mathfrak{A}')} \cdot \frac{du}{\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}} [\mathfrak{A}_\gamma G_\delta' - \mathfrak{A}_\delta G_\gamma'] \right\},$$

II′) $$\eta_\alpha' = \lim_{\mathfrak{P}=0} \left\{ \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}'}{a G'(\mathfrak{A}')} \cdot \frac{du}{\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}} [\mathfrak{A}_\alpha \sum G_k' d^2 \mathfrak{A}_k' - G_\alpha' Q_2(du, dv)] \right\},$$

III′) $$\eta' = \lim_{\mathfrak{P}=0} \left\{ \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}'}{a G'(\mathfrak{A}')} \cdot \frac{du}{\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}} \left[\left\{ \frac{3}{2} dQ_2(du, dv) + \frac{1}{2} Q_3(du, dv) \right\} \sum G_k' d^2 \mathfrak{A}_k' \right.\right.$$
$$\left.\left. - Q_2(du, dv) \sum G_k' d^3 \mathfrak{A}_k' \right] \right\}.$$

III. Anwendungen.

1. Über die Kurven $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$.

Es sei $\mathfrak{P}$ eine in $\mathfrak{R}$ (D, S. 184 (6)) in der Potenz $\varrho > 0$ enthaltene rimkurve, die nicht Punktkurve ist. Es sind dann in (I) die $\eta_{\alpha\beta}$ wegen , (2) und (8) nicht identisch Null. Wenn die Fläche G nicht besonders ewählt ist, so berührt sie F nicht längs $\mathfrak{P}$, so daß die G_k für $\mathfrak{P} = 0$ icht proportional zu den $\mathfrak{A}_k'$ werden. Daher folgt aus (I), daß $G(\mathfrak{A}) = \mathfrak{P}^a \mathfrak{G}$ enau durch die $(\varrho+1)$-te Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar sein muß. Das gilt

auch noch für $\varrho = 0$, wenn also $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}$ nicht enthalten ist. Wenn dagegen die Fläche G die Fläche F längs $\mathfrak{P}$ berührt, so folgt $a > \varrho + 1$. Es verhält sich also $\mathfrak{P}$ wie ein Rückkehrpunkt von der Rückkehrordnung ϱ einer Kurve C; denn jede durch einen solchen Punkt gehende Kurve hat mit C in dem Rückkehrpunkt mindestens $\varrho + 1$ zusammenfallende Schnittpunkte. Hier haben wir, wenn wir das aus (I′) folgende duale Ergebnis gleich hinzufügen.

Ist $\mathfrak{P}$ eine nicht in einen Punkt kondensierte Primkurve, die in $\mathfrak{R}$ in der ϱ-ten Potenz enthalten ist, so hat eine durch $\mathfrak{P}$ gehende Fläche G die Kurve $\mathfrak{P}$ mindestens $(\varrho+1)$-mal mit F gemeinsam. Geht G einfach durch $\mathfrak{P}$ und berührt G die Fläche F nicht längs $\mathfrak{P}$, so hat G die Kurve $\mathfrak{P}$ genau $(\varrho+1)$-mal mit F gemeinsam.

Es sei $\mathfrak{P}'$ eine nicht in eine Ebene kondensierte F umschriebene abwickelbare Fläche und es sei $\mathfrak{P}$ die Kurve, längs der $\mathfrak{P}'$ die Fläche F berührt. Ist $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}'$ in der ϱ'-ten Potenz enthalten, so hat jede Fläche G', aufgefaßt als Gesamtheit ihrer Ebenen, die Fläche $\mathfrak{P}'$ mindestens $(\varrho'+1)$-mal gemeinsam mit F. Berühren die Ebenen von $\mathfrak{P}'$ die Fläche G' nur einmal und geht G' nicht durch $\mathfrak{P}$, so hat G' die Fläche $\mathfrak{P}'$ genau $(\varrho'+1)$-mal mit F gemeinsam.

$\mathfrak{R}$ heißt die *Rückkehrkurve* und $\mathfrak{R}'$ die *parabolische* oder *Wendekurve von F*. Ist die Primkurve $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}$ in der ϱ-ten und in $\mathfrak{R}'$ in der ϱ'-ten Potenz enthalten; so heißt $\mathfrak{P}$ eine *Rückkehrkurve der Rückkehrordnung* ϱ und eine *Wendekurve der Wendeordnung* ϱ'.

2. Über das identische Verschwinden von $LN - M^2$.

Eine algebraische Fläche F hat im allgemeinen zweifach unendlich viele Punkte und Ebenen. Es kann aber sowohl der Fall eintreten, daß sie ∞^2 Punkte, aber nur ∞^1 Ebenen hat, wie auch, daß sie ∞^2 Ebenen, aber nur ∞^1 Punkte hat. Im ersten Fall ist F als Ordnungsfläche (d. h. als Gesamtheit ihrer Punkte) eine eigentliche Fläche, als Klassenfläche (d. h. als Gesamtheit ihrer Ebenen) keine eigentliche Fläche. Im zweiten Falle ist F als Ordnungsfläche keine eigentliche Fläche, wohl aber als Klassenfläche. Im ersten Fall degeneriert F in eine abwickelbare Fläche, im zweiten Fall in eine Kurve. Diese beiden Fälle sind zueinander dual.

Es fragt sich, wodurch diese beiden Fälle charakterisiert sind. Es sei F eine abwickelbare Fläche. Dann hängen die Verhältnisse der Koordinaten x'_α ihrer Ebenen, also auch die Verhältnisse der $\mathfrak{A}'_\alpha$ nur von einem Parameter ab. Und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, ist F eine abwickelbare Fläche. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist aber, daß die Determinanten $\mathfrak{Z}'_k$ (vgl. D, S. 185 (5)) identisch ver-

winden. Das wiederum tritt dann und nur dann ein (D, S. 185 (6)), n $\mathfrak{R}'$ identisch Null ist. Nehmen wir den dualen Satz hinzu und chten die Gleichung D, S. 190 (18), so haben wir:

Sind L, M, N die Gaußschen Fundamentalgrößen zweiter Ordnung r Fläche F, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, F in eine abwickelbare Fläche oder eine Kurve degeneriert,

$$LN - M^2 = \mathfrak{R}\mathfrak{R}' \text{ identisch Null},$$

zwar tritt der erste oder zweite Fall ein, je nachdem $\mathfrak{R}'$ oder $\mathfrak{R}$ ntisch Null ist.

3. Ein Satz über Inflexionskurven.

Es gilt der Satz

Eine ebene Inflexionskurve, die nicht Ebenenkurve ist, ist eine ade oder eine Punktkurve.

Die Inflexionskurven sind dadurch definiert, daß längs ihrer die ußsche Fundamentalform zweiter Ordnung $Q_2(du, dv)$ verschwindet. sei $\mathfrak{P}$ eine ebene Kurve auf F, die Inflexionskurve ist, aber nicht enenkurve. Die Ebene von $\mathfrak{P}$ soll also F nicht längs $\mathfrak{P}$ berühren. liege $\mathfrak{P}$ in der Ebene $y_4 = 0$. Wir wählen in (II) $G(y) \equiv y_4$. Da Ebene $y_4 = 0$ F nicht längs $\mathfrak{P}$ berührt, so ist nach III, Nr. 1

$$G(\mathfrak{A}) = \mathfrak{P}^{\varrho+1}\mathfrak{G},$$

n $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}$ in der ϱ-ten Potenz enthalten ist. Ferner ist

$$G_1 = G_2 = G_3 = 0, \quad G_4 = 1.$$

längs $\mathfrak{P}$ identisch $\mathfrak{A}_4 = 0$, also auch $d^2\mathfrak{A}_4 = 0$ und da längs $\mathfrak{P}$ die m Q_2 verschwindet, so folgt aus (II) $\eta_a = 0$, also nach I (3), da die nicht sämtlich Null sein können, $\mathfrak{z}_{01}\mathfrak{z}_{02} = 0$, so daß nach I (8) $\mathfrak{P}$ Punkt- ve oder Gerade ist.

Dual ergibt sich:

Eine Inflexionskurve, die gleichzeitig Berührungskurve eines Kegels r nicht Punktkurve ist, ist eine Gerade oder eine Ebenenkurve.

In ähnlicher Weise schließt man aus (II) und (II′):

Jede Ebenenkurve, Punktkurve und Gerade von F ist Inflexions- ve.

4. Über das identische Verschwinden von $\mathfrak{S}$.

Infolge der Definition der Salmonschen Kurve $\mathfrak{S}$ einer Fläche F in jedem ihrer Punkte F eine Inflexionstangente, die von höherer als iter Ordnung berührt (vgl. D VI, S. 195, 196) und umgekehrt liegt

jeder solche Punkt von F auf $\mathfrak{S}$. Daher ist jede auf F liegende Gerade in $\mathfrak{S}$ enthalten; denn in jedem ihrer Punkte hat F eine Inflexionstangente der angegebenen Art, nämlich die Gerade selbst. Ist daher F eine geradlinige Fläche, so muß $\mathfrak{S}$ identisch Null sein. Es sei umgekehrt $\mathfrak{S}$ identisch Null. Es sei S eine reguläre Stelle von F. Da $\mathfrak{S}$ identisch Null ist, so haben die Formen $Q_2(du, dv)$ und $Q_3(du, dv)$ einen gemeinsamen Faktor und es geht durch S eine Kurve $\mathfrak{P}$, längs der Q_2 und Q_3 Null wird. Da S eine reguläre Stelle ist, so können wir annehmen, daß $\mathfrak{P}$ weder eine Punkt- noch eine Ebenenkurve ist. Wir wissen freilich zunächst nicht, ob $\mathfrak{P}$ eine algebraische Kurve ist und können daher die Formel (III) nicht auf den ganzen Verlauf von $\mathfrak{P}$ anwenden, aber wohl in der Umgebung von S. Es ergibt sich, daß längs $\mathfrak{P}$ η identisch Null. Daraus folgt nach (4), daß $\partial_1 \partial_2 \partial_3$ identisch Null ist. Es kann aber ∂_3 nicht identisch verschwinden, da $\mathfrak{P}$ keine Punktkurve ist. Also ist $\partial_2 \partial_3$ identisch Null, so daß nach (8) $\mathfrak{P}$ eine Gerade oder eine ebene Kurve ist. Da aber Q_2 längs $\mathfrak{P}$ verschwindet, so ist $\mathfrak{P}$ ebene Inflexionskurve, also nach der vorigen Nummer immer eine Gerade. Wenn also $\mathfrak{S} = 0$, so geht durch jede reguläre Stelle von F eine Gerade, d. h. F ist geradlinig. Wir haben daher:

Es ist $\mathfrak{S}$ dann und nur dann identisch gleich Null, wenn F eine geradlinige Fläche ist.

5. Über die Höchstzahl der auf einer algebraischen Fläche liegenden Geraden.

Auf einer algebraischen Fläche F können drei Arten von Geraden liegen. Es sei $\mathfrak{G}$ eine auf F liegende Gerade.

1. Es können alle Punkte von $\mathfrak{G}$ auf F liegen und alle Ebenen durch $\mathfrak{G}$ Ebenen von F sein. Die Berührungsebene von F in einem Punkte P von $\mathfrak{G}$ ist mit P beweglich und umgekehrt ist der Berührungspunkt einer durch $\mathfrak{G}$ gehenden Ebene E mit E beweglich. In diesem Falle hat ein ebener Schnitt $\mathfrak{A}$ von F und auch eine Berührungskurve $\mathfrak{A}'$ eines Berührungskegels von F *einen* Schnittpunkt mit $\mathfrak{G}$, d. h. es ist

$$(1) \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{G}) = 1, \qquad (\mathfrak{A}', \mathfrak{G}) = 1.$$

2. Alle Punkte von $\mathfrak{G}$ liegen auf F, aber nur *eine* Ebene E von F geht durch $\mathfrak{G}$. Diese Ebene E berührt dann F längs $\mathfrak{G}$. Es ist $\mathfrak{G}$ eine Ebenenkurve. Die Berührungskurve eines Kegels, dessen Spitze nicht in E liegt, schneidet $\mathfrak{G}$ nicht. Es ist daher in diesem Falle

$$(2) \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{G}) = 1, \qquad (\mathfrak{A}', \mathfrak{G}) = 0.$$

Die Gerade ist in diesem Falle nur Gerade von F, wenn wir F als Ordnungsfläche auffassen.

3. Alle Ebenen durch $\mathfrak{G}$ sind Ebenen von F, berühren aber F alle demselben Punkt. Es ist in diesem Falle $\mathfrak{G}$ nur Gerade von F, wenn F als Klassenfläche auffassen. Es ist $\mathfrak{G}$ Punktkurve und es wird

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{G}) = 0, \qquad (\mathfrak{A}', \mathfrak{G}) = 1.$$

Fälle 2. und 3. sind dual zueinander.

Wie wir schon in der vorigen Nummer sahen, ist jede Gerade $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{S}$ halten, und zwar, wie einfache Beispiele zeigen, in den einfachsten len in der ersten Potenz. Nach (1), (2), (3) ist daher die Höchstzahl auf einer Ordnungsfläche liegenden Geraden $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S})$ und der auf einer ssenfläche liegenden $(\mathfrak{A}', \mathfrak{S})$. Wir benutzen die Äquivalenzen D, S. 221 '), (IV'), nämlich

$$\mathfrak{R}^5 \mathfrak{D}^{11} \mathfrak{S} \sim \mathfrak{A}^{11n-24}, \qquad \mathfrak{R}'^5 \mathfrak{D}'^{11} \mathfrak{S} \sim \mathfrak{A}'^{11n'-24}.$$

rin ist $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{R}^2$, abgesehen von Punktkurven und $\mathfrak{D}'$ durch $\mathfrak{R}'^2$ gesehen von Ebenenkurven teilbar, wie ich an anderer Stelle beweisen de. Wir setzen $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}^2 \mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}' = \mathfrak{R}'^2 \mathfrak{D}_0'$, so daß

$$\mathfrak{S} \sim \mathfrak{A}^{11n-24} \mathfrak{D}_0^{-11} \mathfrak{R}^{-27} \sim \mathfrak{A}'^{11n'-24} \mathfrak{D}_0'^{-11} \mathfrak{R}'^{-27}.$$

setzen

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_0) = 2b_0, \quad (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}) = c, \quad (\mathfrak{A}', \mathfrak{D}_0') = 2b_0', \quad (\mathfrak{A}', \mathfrak{R}') = c'.$$

gen (5) und (6) haben wir also

Die Höchstzahl der auf einer Ordnungsfläche liegenden Geraden ist

$$(11n - 24)n - 22b_0 - 27c$$

der auf einer Klassenfläche liegenden

$$(11n' - 24)n' - 22b_0' - 27c'.$$

bei ist n die Ordnung der Fläche und b_0 und c sind die Ordnungen r mehrfachen und Rückkehrkurve. Die Zahlen n', b_0', c' sind dual n, b_0, c.

Halle a. d. Saale, Mai 1921.

(Eingegangen am 8. Juli 1921.)

Ebene Schnitte und Berührungskegel einer algebraischen Fläche.

Von

Heinrich W. E. Jung in Halle a. d. Saale.

Einleitung.

Es sind folgende Fragen, um die es sich in dieser Arbeit handelt.

1. Ist $\mathfrak{P}$ eine ebene Schnittkurve einer algebraischen Fläche F, so entsteht die Frage, wie hängen die charakteristischen Divisoren von $\mathfrak{P}$, nämlich die Divisoren der stationären Punkte und Tangenten und die der mehrfachen Punkte und Tangenten, von der Fläche F und von der Lage der Ebene von $\mathfrak{P}$ zur Fläche F ab?

2. Ist $\mathfrak{H}$ eine der besonderen Kurven von F, wie ist die Gestalt von F in der Umgebung einer regulären Stelle von $\mathfrak{H}$?

3. Ist H ein singulärer Punkt von F, wie ist die Gestalt von F in der Umgebung von H?

Die beiden letzten Fragen kann man dadurch beantworten, daß man die Gestalt ebener Schnitte durch eine reguläre Stelle von $\mathfrak{H}$ oder durch den Punkt H betrachtet. Ihre Beantwortung ist also durch die von 1. im wesentlichen mitgegeben.

Die Untersuchung der Berührungskegel ist dual zu der der ebenen Schnitte.

Ich benutze im folgenden meine Arbeiten: Über die Differentialinvarianten algebraischer Flächen, Diese Zeitschr. 8, S. 182—221, zitiert mit D. Kurven auf algebraischen Flächen, Diese Zeitschr. **13**, S. 189—201, zitiert mit K.

I. Ebene Schnitte.

1. Die ebene Schnittkurve $\mathfrak{P}$.

Die betrachtete algebraische Fläche heiße F. Sie sei definiert wie in D. Das Tetraederkoordinatensystem (y_a) sei so gewählt, daß die Ebene

deren Schnitt mit F wir untersuchen wollen, die Ebene $y_4 = 0$ ist, laß $\mathfrak{A}_4$ die Schnittkurve ist. Es kann $\mathfrak{A}_4$ Punktkurven enthalten. e bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}$ und setzen

$$\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{B}\mathfrak{P},$$

also $\mathfrak{P}$ keine Punktkurve mehr enthalten soll. Wir beschränken uns den Fall, wo $\mathfrak{P}$ keine Primkurve in höherer als erster Potenz enthält. nennen $\mathfrak{P}$ den *ebenen Schnitt* und $\mathfrak{B}\mathfrak{P}$ den *vollständigen ebenen nitt* der Ebene E mit F.

2. Einige Divisoren der Kurve $\mathfrak{P}$.

a) Die Kurve $\mathfrak{P}$ hat als Kurve auf F einen bestimmten Divisor ihrer rfachen Stellen, den wir mit $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ bezeichnen wollen. Er ist dadurch iert, daß er jeden Primteiler des algebraischen Körpers $\mathfrak{P}$ gerade ft enthält wie $\frac{1}{du}\frac{\partial \mathfrak{P}(u,v)}{\partial v}$ oder $\frac{1}{dv}\frac{\partial \mathfrak{P}(u,v)}{\partial u}$, was dasselbe ist, da $u + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} dv = 0$ für $\mathfrak{P} = 0$. Es ist also

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = \left\{\frac{1}{du}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}\right\}_{\mathfrak{P}=0} = \left\{\frac{1}{dv}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u}\right\}_{\mathfrak{P}=0}$$

achten wir $\mathfrak{P}$ als Kurve in der Ebene E ohne Rücksicht auf die he F, so hat $\mathfrak{P}$ im allgemeinen einen anderen Divisor der mehrfachen en, den wir mit $\mathfrak{m}$ bezeichnen. Die Ordnungen von $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{m}$ seien und $2m$.

b) Für $\mathfrak{P} = 0$ gehen die Divisoren $\mathfrak{A}'_\alpha$ in Divisoren des Körpers $\mathfrak{P}$. Wir bezeichnen den größten gemeinsamen Teiler der Divisoren, in die Divisoren $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \mathfrak{A}'_3$ für $\mathfrak{P} = 0$ übergehen, mit $\mathfrak{b}$ und setzen

$$\{\mathfrak{A}'_\alpha\}_{\mathfrak{P}=0} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}^{(1)}_\alpha.$$

Ist die Ebene E von $\mathfrak{P}$ nicht die Ebene $y_4 = 0$, so ist $\mathfrak{b}$ folgenderen definiert. Sind

$$c_{1i}y'_1 + c_{2i}y'_2 + c_{3i}y'_3 + c_{4i}y'_4 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Gleichungen dreier nicht in einer Geraden liegenden Punkte von E, t $\mathfrak{b}$ der größte gemeinsame Teiler der drei Divisoren, in die die Divisoren

$$c_{1i}\mathfrak{A}'_1 + c_{2i}\mathfrak{A}'_2 + c_{3i}\mathfrak{A}'_3 + c_{4i}\mathfrak{A}'_4$$

$\mathfrak{P} = 0$ übergehen.

Eine Stelle S von F liefert dann und nur dann einen Beitrag zu $\mathfrak{b}$, an der Stelle $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \mathfrak{A}'_3$ verschwinden. Da aber die $\mathfrak{A}'_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) Koordinaten der Ebenen von F sind, so liefert S zu $\mathfrak{b}$ dann und nur einen Beitrag, wenn die Ebene von F in S die Koordinaten 0, 0, 0, 1

hat, also mit der Ebene E zusammenfällt. Mit anderen Worten: Ein Stelle S von F liefert dann und nur dann einen Beitrag zu $\mathfrak{b}$, wenn die Fläche F in S berührt. Wir nennen daher $\mathfrak{b}$ den *Berührungsdivisor von* $\mathfrak{P}$.

c) Für $\mathfrak{P}=0$ geht die Differentialform $Q_2(du, dv)$ (vgl. D, S. 18 (5), (6)) über in ein Differential des Körpers $\mathfrak{P}$. Da

$$Q_2(du, dv) = \sum' \mathfrak{A}_k' d^2 \mathfrak{A}_k \tag{4}$$

und da $d^2\mathfrak{A}_4 = 0$ für $\mathfrak{P}=0$, so ist dies Differential durch $\mathfrak{b}$ teilbar. Wir setzen

$$\{Q_2(du, dv)\}_{\mathfrak{P}=0} = \mathfrak{b}\mathfrak{q}. \tag{5}$$

Wir bezeichnen im übrigen die Divisoren, die aus den Kurven von $\mathfrak{A}$ für $\mathfrak{P}=0$ hervorgehen, mit dem entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben.

3. Der Divisor $\mathfrak{z}_1$ der Rückkehrpunkte von $\mathfrak{P}$.

Für $\mathfrak{P}=0$ wird $\mathfrak{A}_4 = 0$. Es geht $\mathfrak{A}_\alpha$ über in $\mathfrak{a}_\alpha$ für $\alpha = 1, 2, 3$ und es sind die $\mathfrak{a}_\alpha$ proportional zu den Punktkoordinaten ξ_α der Punkte von $\mathfrak{P}$. Wir wählen in Formel (I) in K, S. 196 $G(y) = y_4$, so daß wegen (1

$$G(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_4 = \mathfrak{B}\mathfrak{P}. \tag{6}$$

Ferner wird

$$G_1 = G_2 = G_3 = 0, \quad G_4 = 1. \tag{7}$$

Wir nehmen in der Formel (I) $\delta = 4$ und $\alpha\beta\gamma$ als gerade Permutation von 1 2 3. Dann wird $\eta_{\alpha\beta}$ nach K, S. 190 (2) und S. 192 (13) gleich $\eta_\gamma = \mathfrak{z}_1 \mathfrak{a}_\gamma'$. Wir erhalten also

$$\mathfrak{z}_1 \mathfrak{a}_\alpha' = \left\{ \frac{\Re \mathfrak{A}_\alpha'}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{du}{\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}} \right\}_{\mathfrak{P}=0}$$

oder wegen (2), (3)

$$\mathfrak{z}_1 \mathfrak{a}_\alpha' = \frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_\alpha^{(1)}}{\mathfrak{v}\,\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}}.$$

Da die $\mathfrak{a}_\alpha'$ und ebenso die $\mathfrak{a}_\alpha^{(1)}$ ganze Divisoren ohne gemeinsamen Teiler sind, so folgt $\mathfrak{a}_\alpha^{(1)} = \mathfrak{a}_\alpha'$, so daß (3) übergeht in

$$\{\mathfrak{A}_\alpha'\}_{\mathfrak{P}=0} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_\alpha'. \tag{8}$$

Ferner ergibt sich

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{b}}{\mathfrak{v}\,\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}}. \tag{9}$$

Aus (8) sehen wir, daß die Koordinaten $\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2', \mathfrak{A}_3'$ der Ebenen von
ür $\mathfrak{P} = 0$ in die Linienkoordinaten der Geraden von $\mathfrak{P}$ übergehen, ein
ebnis, das geometrisch klar ist.

Die Gleichung (9) zeigt uns, wie die stationären Stellen von $\mathfrak{P}$ zu-
de kommen. Wir betrachten besondere Fälle.

a) Die Ebene E habe keine besondere Lage. Dann ist

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{b} = \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = 1, \qquad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{r} = \{\mathfrak{R}\}_{\mathfrak{P}=0}.$$

hat also in diesem Falle $\mathfrak{P}$ dort und nur dort einen stationären Punkt,
$\mathfrak{P}$ die Kurve $\mathfrak{R}$ trifft. Es sei $\mathfrak{H}$ eine in $\mathfrak{R}$ in der ϱ-ten Potenz ent-
ene nicht in einen Punkt kondensierte Primkurve und es sei S eine
läre Stelle von $\mathfrak{H}$. Die Ebene E von $\mathfrak{P}$ gehe durch S und habe keine
ndere Lage. Dann haben $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ in S *einen* Schnittpunkt, so daß
Divisor, in den $\mathfrak{H}$ für $\mathfrak{P} = 0$ übergeht, genau die erste Potenz des zur
le S gehörenden Primteilers $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ enthält. Es ist daher $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{r} = \mathfrak{z}_1$
au in der ϱ-ten Potenz enthalten. Wir haben also:

*Ist $\mathfrak{H}$ eine nicht in einen Punkt kondensierte Primkurve von F, die
$\mathfrak{R}$ in der ϱ-ten Potenz enthalten ist, so hat ein durch eine reguläre
le S von $\mathfrak{H}$ gehender ebener Schnitt von F ohne weitere besondere
e in S einen Rückkehrpunkt der Rückkehrordnung ϱ.*

Damit ist die Bezeichnung Rückkehrkurve für $\mathfrak{R}$ gerechtfertigt.

b) Die Ebene E gehe durch einen Punkt von F, in den eine Kurve
densiert ist, habe aber sonst keine besondere Lage. Dann ist

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = 1, \qquad \mathfrak{v} \neq 1, \qquad \mathfrak{z}_1 = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{v}}.$$

r $\mathfrak{z}_1$ ist immer ein ganzer Divisor. Daraus schließen wir, daß $\mathfrak{r}$ durch
eilbar sein muß, wie auch die Ebene E liegen mag, wenn nur $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = 1$
Das aber ist nur möglich, wenn durch jede Stelle, durch die $\mathfrak{V}$ geht,
h $\mathfrak{R}$ geht, d. h. es ist $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{V}$ teilbar. Also haben wir:

*Jede Punktkurve ist in $\mathfrak{R}$ enthalten, und zwar mindestens in der
enz, in der sie in einer durch ihren Punkt gehenden Ebene ohne be-
dere Lage enthalten ist.*

c) Da $\mathfrak{z}_1$ ein ganzer Divisor ist, so kann eine Stelle S von F zu $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$
einen Beitrag liefern, wenn sie zu $\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{b}$ einen liefert; d. h.: Ein
ner Schnitt hat als Kurve auf F mehrfache Stellen höchstens dort, wo
e Ebene F berührt oder wo sie $\mathfrak{R}$ trifft.

4. Der volle Divisor der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$.

Setzen wir

$$F(y_1, y_2, y_3, 0) = f(y_1, y_2, y_3) = f(y),$$

so ist

$$f(\xi) = 0 \tag{13}$$

die Gleichung von $\mathfrak{P}$ in Punktkoordinaten. Nach K, S. 192 (19) ist

$$f_a(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m}\,\mathfrak{z}_{01}\,\mathfrak{a}'_a = \mathfrak{m}_0\,\mathfrak{z}_{01}^3\,\mathfrak{a}'_a. \tag{14}$$

Andererseits ist wegen (12) und D, S. 184 (9)

$$f_a(\mathfrak{a}) = \{F_a(\mathfrak{A})\}_{\mathfrak{P}=0} = \{\mathfrak{R}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{A}'_a\}_{\mathfrak{P}=0},$$

also wegen (8)

$$f_a(\mathfrak{a}) = \mathfrak{r}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}'_a. \tag{15}$$

Durch Vergleich mit (9) und (14) folgt

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{01}^2\,\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{d}\,\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{v}. \tag{16}$$

a) Die Ebene E habe keine besondere Lage, so daß $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{v} = 1$. Dann wird

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{d} = \{\mathfrak{D}\}_{\mathfrak{P}=0} \tag{17}$$

und, da in diesem Falle $\mathfrak{z}_{01} = \mathfrak{r}$ ist,

$$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{d}\,\mathfrak{r}^{-2} = \{\mathfrak{D}\,\mathfrak{R}^{-2}\}_{\mathfrak{P}=0}. \tag{18}$$

Ein ebener Schnitt ohne besondere Lage hat also mehrfache Punkte nu da, wo er die Kurve $\mathfrak{D}$ trifft. *Es ist daher $\mathfrak{D}$ die mehrfache Kurve vo* F, was allerdings auch schon daraus folgt, daß längs $\mathfrak{D}$ die vier Ab leitungen $F_k(\mathfrak{A})$ Null sind. Es ergibt sich ferner aus (16), da $\mathfrak{m}$ ei ganzer Divisor ist, daß $\mathfrak{D}$ eine ganze Kurve sein muß, soweit es sic nicht um Punktkurven handelt. Denn nach (16) kann $\mathfrak{m}$ ganz sein, wen auch $\mathfrak{D}$ eine Punktkurve $\mathfrak{B}_1$ in negativer Potenz enthält, da $\mathfrak{B}_1$ ja in $\mathfrak{P}$ enthalten ist, wenn die Ebene von $\mathfrak{P}$ durch den Punkt geht, in den $\mathfrak{B}$ kondensiert ist. In der Tat ist auch $\mathfrak{D}$ in bezug auf Punktkurven nich immer ganz, wie folgendes Beispiel zeigt. Es sei in der Umgebung einer Stell

$$\mathfrak{A}_1 = u^3 v^2, \quad \mathfrak{A}_2 = u^3 v, \quad \mathfrak{A}_3 = u^2 v, \quad \mathfrak{A}_4 = 1,$$

also

$$F(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{A}_4 - \mathfrak{A}_2^3.$$

Man findet

$$\mathfrak{Z}_1 = u^4 v, \quad F_1(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_4 = u^3 v = \mathfrak{Z}_1\,\mathfrak{D},$$

so daß

$$\mathfrak{D} = u^{-1}.$$

Es enthält also $\mathfrak{D}$ die Primkurve, deren zugeordnete Funktion für die be trachtete Stelle u ist, in negativer Potenz. Da $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = 0$ fü $u = 0$, so ist diese Primkurve Punktkurve.

Aus (18) schließen wir, da $\mathfrak{m}_0$ ganz ist, daß $\mathfrak{D}$ bis auf die Punktrven durch $\mathfrak{R}^2$ teilbar sein muß. *Setzen wir*

9) $$\mathfrak{D} = \mathfrak{R}^2 \mathfrak{D}_0,$$

ist $\mathfrak{D}_0$ wie $\mathfrak{D}$ bis auf Punktkurven ganz.

5. Der Divisor $\mathfrak{d}_2$ der stationären Tangenten von $\mathfrak{P}$.

Wir benutzen jetzt die Gleichung (II) in K, S. 196, und zwar wählen r wieder $G(y) = y_4$. Wir berechnen η_4. Dies ist hier wegen K, 190, (3) und S. 192, (14) gleich $\mathfrak{d}_1^2 \mathfrak{d}_2$. Da $\mathfrak{A}_4 = 0$ und also auch $\mathfrak{A}_4 = 0$ für $\mathfrak{P} = 0$, so ergibt sich wegen (6) und (7) aus (II)

$$\mathfrak{d}_1^2 \mathfrak{d}_2 = \left\{ \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{du}{\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}} Q_2(du, dv) \right\}_{\mathfrak{P}=0}$$

er wegen (2) und (5)

$$\mathfrak{d}_1^2 \mathfrak{d}_2 = \frac{\mathfrak{r}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{q}}{\mathfrak{v}\, \mathfrak{b}_1}.$$

urch Vergleich mit (9) folgt

0) $$\mathfrak{q} = \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2.$$

egen (5) ist also

1) $$\{Q_2(du, dv)\}_{\mathfrak{P}=0} = \mathfrak{b}\, \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2.$$

Wir benutzen weiter die Gleichung D, S. 194, (26), nämlich

2) $$\mathfrak{R}' Q_1(du, dv)^2 - \mathfrak{R} Q_1'(du, dv)^2 = \mathfrak{J} Q_2(du, dv).$$

erin ist (D, S. 191, (7) bis (10))

3) $$Q_1(du, dv) = X du + Y dv = \sum p_{kl} (\mathfrak{A}_k d\mathfrak{A}_l - \mathfrak{A}_l d\mathfrak{A}_k),$$

4) $$Q_1'(du, dv) = X' du + Y' dv = \sum p'_{kl} (\mathfrak{A}'_k d\mathfrak{A}'_l - \mathfrak{A}'_l d\mathfrak{A}'_k),$$

p_{kl} und p'_{kl} die Plückerschen Koordinaten einer Geraden g sind. Es id die p_{kl} und p'_{kl} die Determinanten zweiter Ordnung aus den Koorditen zweier durch g gehenden Ebenen und zweier auf g liegenden Punkte. ir wählen die Gerade g in der Ebene von $\mathfrak{P}$, also in der Ebene $y_4 = 0$. wird dann $p'_{14} = p'_{24} = p'_{34} = 0$ und es sei gesetzt

5) $$p'_{23} = p_1, \quad p'_{31} = p_2, \quad p'_{12} = p_3.$$

die Punkte mit den Koordinaten $\mathfrak{A}_\alpha$ und $\mathfrak{A}_\alpha + d\mathfrak{A}_\alpha$ für $\mathfrak{P} = 0$ in r Ebene von $\mathfrak{P}$ liegen, so liegt auch ihre Verbindungsgerade, deren ückersche Koordinaten $\mathfrak{A}_k d\mathfrak{A}_l - \mathfrak{A}_l d\mathfrak{A}_k$ sind, in ihr und schneidet g. aher ist für $\mathfrak{P} = 0$ identisch

$$\sum p_{kl} (\mathfrak{A}_k d\mathfrak{A}_l - \mathfrak{A}_l d\mathfrak{A}_k) = Q_1(du, dv) = 0.$$

Die Gleichung (22) geht also für $\mathfrak{P} = 0$ über in

$$(26) \qquad -\Re\left\{\sum p_\alpha(\mathfrak{A}'_\beta d\mathfrak{A}'_\gamma - \mathfrak{A}'_\gamma d\mathfrak{A}'_\beta)\right\}^2 = \Im Q_2(du, dv), \qquad (\mathfrak{P} = 0)$$

Für $\mathfrak{P} = 0$ wird nach (8) $\mathfrak{A}'_k = \mathfrak{b}\, a'_k$, also in Verbindung mit K S. 192, (16)

$$(27) \qquad \{\mathfrak{A}'_\beta d\mathfrak{A}'_\gamma - \mathfrak{A}'_\gamma d\mathfrak{A}'_\beta\}_{\mathfrak{P}=0} = \mathfrak{b}^2(a'_\beta da'_\gamma - a'_\gamma da'_\beta) = \mathfrak{b}\,\mathfrak{z}_2\, a_\alpha .$$

Die Kurve $\mathfrak{J}$ geht ihrer Definition nach durch die Stellen von F, deren eine Inflexionstangente durch die Gerade g geht. Es kann $\mathfrak{J}$ eine von g unabhängige Kurve als Faktor enthalten, die also allen $\mathfrak{J}$-Kurven gemeinsam ist. Diese bezeichnen wir mit $\mathfrak{W}$. Wie auch die Gerade g liegen mag, es muß immer an jeder Stelle von $\mathfrak{W}$ eine Tangente von F vorhanden sein, die F von höherer als erster Ordnung berührt und durch g geht. Es müssen also an jeder Stelle von $\mathfrak{W}$ *alle* Tangenten von F von höherer als erster Ordnung berühren. Die Fläche muß sich in den Stellen von S ihrer Berührungsebene besonders stark anschmiegen. Daher nenne ich $\mathfrak{W}$ die *Flachkurve von F*. Wir setzen

$$(28) \qquad \mathfrak{J} = \mathfrak{W}\mathfrak{J}_0 .$$

Die Kurven $\mathfrak{J}_0$ können von der Geraden g unabhängige gemeinsame Schnittstellen haben. In diesen Stellen muß sich dann auch F ihrer Berührungsebene besonders stark anschmiegen. Diese Stellen von F heißen *isolierte Flachstellen*.

Die Gerade g soll in der Ebene E keine besondere Lage haben. Wenn E keine besondere Lage hat, so können die Divisoren $\mathfrak{i}_0$, in die die Kurven $\mathfrak{J}_0$ für $\mathfrak{P} = 0$ übergehen, doch einen von g unabhängigen Faktor haben, da g nicht frei beweglich ist, sondern in E liegen soll. Wir bezeichnen einen von g unabhängigen Faktor mit $\mathfrak{i}_1$ und setzen

$$(29). \qquad \mathfrak{i}_0 = \mathfrak{i}_1\,\mathfrak{i}_2 .$$

Es ist dann

$$(30) \qquad \{\mathfrak{J}\}_{\mathfrak{P}=0} = \mathfrak{w}\,\mathfrak{i}_1\,\mathfrak{i}_2 .$$

Wegen (21), (27) und (30) folgt aus (26)

$$\mathfrak{r}\,\mathfrak{b}^4\,\mathfrak{z}_2^2\left\{\sum p_\alpha a_\alpha\right\}^2 = \mathfrak{w}\,\mathfrak{i}_1\,\mathfrak{i}_2\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2 .$$

Benutzen wir (9), so finden wir

$$\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{b}^2\,\mathfrak{b}_\mathfrak{w}\left\{\sum p_\alpha a_\alpha\right\}^2 = \mathfrak{w}\,\mathfrak{i}_1\,\mathfrak{i}_2 .$$

Da die a_α keinen gemeinsamen Teiler haben und ebensowenig die $\mathfrak{i}_2$, so folgt

$$\left\{\sum p_\alpha a_\alpha\right\}^2 = i_2,$$

$$\delta_2 = \frac{\mathfrak{w}\, i_1}{\mathfrak{v}\, \mathfrak{b}_\mathfrak{P}\, \mathfrak{b}^2}.$$

Bezeichnen wir die Ordnung eines Divisors $\mathfrak{q}$ des Körpers $\mathfrak{P}$ mit $[\mathfrak{q}]$, folgt aus (30) und (31)

$$[\mathfrak{w}\, i_1\, i_2] = (\mathfrak{F}, \mathfrak{P}), \quad [i_2] = 2\,[\mathfrak{a}_\alpha] = 2\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = 2n,$$

$$[\mathfrak{w}\, i_1] = (\mathfrak{F}, \mathfrak{P}) - 2n.$$

an $\mathfrak{B} = 1$, also $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{P} \sim \mathfrak{A}$, so ist

$$[\mathfrak{w}\, i_1] = (\mathfrak{F}, \mathfrak{A}) - 2n.$$

a) Die Ebene E habe keine besondere Lage, so daß $\mathfrak{v} = \mathfrak{b}_\mathfrak{P} = \mathfrak{b} = 1$, also

$$\delta_2 = \mathfrak{w}\, i_1.$$

Es sei $\mathfrak{H}$ eine in $\mathfrak{W}$ in der Potenz φ enthaltene Primkurve, die nicht ktkurve ist. Wir nennen $\mathfrak{H}$ eine Flachkurve der Flachordnung φ. lich wie wir in Nr. 3 geschlossen haben, finden wir hier:

Ist S eine reguläre Stelle einer nicht in einen Punkt kondensierten chkurve der Flachordnung φ, so hat ein durch S gehender ebener nitt ohne besondere Lage in S eine Wendetangente der Wendeordnung φ.

Es ist übrigens eine in $\mathfrak{W}$ enthaltene Kurve, die weder Punktkurve h Ebenenkurve ist, immer auch in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ enthalten, wie ich in er späteren Arbeit beweisen will. Wenn also $\mathfrak{H}$ keine Ebenenkurve ist, hat der ebene Schnitt in S im einfachsten Falle eine Schnabelspitze.

Zu i_1 in (35) liefere die Stelle S einen Beitrag. Dann muß eine der exionstangenten in S die Gerade g schneiden, gleichgültig wie die ade g in der Ebene E liegt. Es muß also die eine Inflexionstangente S in E liegen. *Daher sind, solange E keine besondere Lage hat, die lexionstangenten des durch E ausgeschnittenen ebenen Schnittes die E liegenden Inflexionstangenten von F, wenn wir die sämtlichen genten, die F in einer Stelle von $\mathfrak{W}$ hat, mit zu den Inflexions-genten rechnen, etwa als uneigentliche.* Die Ordnung von $\mathfrak{w}\, i_1$ ist n gleich der Anzahl der in E liegenden Inflexionstangenten von F. haben also wegen (34):

Die Zahl i_e der in einer Ebene ohne besondere Lage liegenden In-ionstangenten von F ist

$$i_e = (\mathfrak{F}, \mathfrak{A}) - 2n.$$

b) Es sei S eine gewöhnliche Stelle von F, und E sei die Berührungs-ne von F in S. Es hat dann $\mathfrak{P}$ in S einen gewöhnlichen Doppel-

punkt, dessen Tangenten die Inflexionstangenten von F sind. Die zu de beiden Zweigen von $\mathfrak{P}$ gehörenden Primteiler seien $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Man finde daß für die Umgebung von S

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{v} = 1, \qquad \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2,$$

so daß

$$\delta_2 = \frac{i_1}{\mathfrak{p}_1^3 \mathfrak{p}_2^3}.$$

Da aber $\mathfrak{P}$ in S keine Wendetangente hat, so wird $i_1 = \mathfrak{p}_1^3 \mathfrak{p}_2^3$. Daraus schließen wir, wenn wir das duale Ergebnis gleich hinzufügen:

Die Kurve $\mathfrak{J}_0$ hat bei nicht besonderer Lage der Geraden g in de n' Stellen, wo die durch g gehenden Ebenen von F die Fläche F be rühren, und in den n Stellen, wo g die Fläche F trifft, einen gewöhn lichen Doppelpunkt, dessen Tangenten die Inflexionstangenten von F sind.

c) Es sei H ein isolierter q-facher Punkt von F ohne weitere Be sonderheiten. Es liegt dann in H eine Punktkurve $\mathfrak{B}$. Die Tangentialebenen von F in den Stellen von $\mathfrak{B}$ umhüllen den Berührungskegel $\mathfrak{B}_0$ von F in H, so daß die Stellen von $\mathfrak{B}$ durch die Berührungsebenen von $\mathfrak{B}_0$ oder auch durch die Seitenkanten von $\mathfrak{B}_0$ charakterisiert sind. Die Gerade g habe keine besondere Lage und die Ebene E gehe durch H, so daß $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{P}$ ist. Da der Kegel $\mathfrak{B}_0$ von der q-ten Ordnung ist, so schneidet E aus $\mathfrak{B}_0$ q Seitenkanten $s_1, s_2, \ldots, s_q$ aus und $\mathfrak{P}$ geht durch die q Stellen $S_1, S_2, \ldots, S_q$ von $\mathfrak{B}$, die durch die Seitenkanten bestimmt sind. Der zu dem durch S_i gehenden Zweig von $\mathfrak{P}$ gehörende Primteiler von $\mathfrak{P}$ sei $\mathfrak{p}_i$. Es ist dann, soweit H in Frage kommt,

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_q, \qquad \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{d} = 1. \tag{37}$$

Es ist auch $\mathfrak{w} = 1$, da, wie die Ausrechnung zeigt, $\mathfrak{B}$ nicht in $\mathfrak{W}$ enthalten ist. Daher wird für die Umgebung von H

$$\delta_2 = \frac{i_1}{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_q}.$$

Wenn aber H weiter keine Besonderheiten hat, so hat $\mathfrak{P}$ in H einen q-fachen Punkt mit getrennten Tangenten, aber keine Wendetangente. Daher ist, soweit es sich um H handelt,

$$i_1 = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_q,$$

d. h.: Die Kurve $\mathfrak{J}_0$ geht durch die q Stellen S_i, in denen die Ebene durch g die Punktkurve $\mathfrak{B}$ trifft; oder die Seitenkanten s_i und also jede Seitenkante von $\mathfrak{B}_0$ ist als Inflexionstangente von F aufzufassen. Das ist auch geometrisch einleuchtend. Es sei nämlich S eine Stelle von $\mathfrak{B}$ und B die Berührungsebene von F in S. Dann ist jede in B liegende durch S gehende Gerade eine Tangente von F in S und unter allen diesen be-

rt die in B liegende Seitenkante von $\mathfrak{B}_0$ die Fläche F am stärksten, daß sie die wesentliche Eigenschaft der Inflexionstangenten hat. Es ibt sich auch, daß jede durch H gehende Gerade t Tangente von F und zwar in den Stellen, wo die durch t gehenden Berührungsebenen $\mathfrak{B}$ F berühren.

Dual zu einem q-fachen isolierten Punkt H ist eine q-fache isolierte ene H' von F. Sie berührt F längs einer Kurve q-ter Klasse, die $\mathfrak{B}'$ bezeichnet sei. Es ist $\mathfrak{B}'$ eine Ebenenkurve. Jede in H' liegende rade t ist Tangente von F, und zwar in den Stellen, wo t die Kurve $\mathfrak{B}'$ ft. Die Tangenten von $\mathfrak{B}'$ sind als Inflexionstangenten von F auf-assen und die Kurve $\mathfrak{J}_0$ geht durch die q Stellen von $\mathfrak{B}'$, wo die ch g gehenden Berührungsebenen von $\mathfrak{B}'$ die Kurve $\mathfrak{B}'$ berühren.

Wenn E durch den q-fachen Punkt H geht, so hat $\mathfrak{P}$ in H einen achen Punkt, und zwar mit getrennten Tangenten, wenn weiter keine sonderheiten vorliegen. Es ist also für die Umgebung von H

$$\mathfrak{m} = (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_q)^{q-1}.$$

drerseits wird nach (16) und (37)

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{d}\mathfrak{v} = \mathfrak{d}\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_q,$$

daß

$$\mathfrak{d} = (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_q)^{q-2}.$$

das gilt, wie auch die Ebene E durch H gelegt wird, solange sie nur ne besondere Lage hat, so schließen wir, daß $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{B}^{q-2}$ teilbar Dual dazu muß $\mathfrak{D}'$ durch $\mathfrak{B}'^{q-2}$ teilbar sein.

6. Die Ordnung und die Klasse von $\mathfrak{P}$.

Die Ordnung von $\mathfrak{P}$ ist gleich der Ordnung der Divisoren $\mathfrak{a}_\alpha$, also ich $(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$. Da aber ein allgemeiner ebener Schnitt eine Punktkurve ht trifft, so ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 0$ und daher

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{P}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\mathfrak{P}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_4) = n,$$

daß die Ordnung eines ebenen Schnittes gleich der Ordnung n von ist.

Die Klasse von $\mathfrak{P}$ sei mit n_2 bezeichnet. Sie ist gleich der Ordnung Divisoren $\mathfrak{a}'_\alpha$, also nach (8) gleich

$$n_2 = (\mathfrak{A}', \mathfrak{P}) - b,$$

nn wir die Ordnung von $\mathfrak{d}$ mit b bezeichnen. Da $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}^{-1}$, so folgt, nn wir setzen

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') = a$$

)

$$n_2 = a - (\mathfrak{A}', \mathfrak{B}) - b.$$

Hat die Ebene des Schnittes keine besondere Lage, so ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{B} = 1$. Also:

Die Klasse eines allgemeinen Schnittes ist

$$a = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'). \tag{39}$$

7. Allgemeine ebene Schnitte. Salmonsche Gleichungen.

Wir haben folgende Gleichungen gefunden:

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{b}}{\mathfrak{v}\mathfrak{d}_{\mathfrak{B}}}, \quad \mathfrak{z}_2 = \frac{\mathfrak{w}\mathfrak{i}_1}{\mathfrak{v}\mathfrak{d}_{\mathfrak{B}}\mathfrak{b}^2}, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{z}_1^2\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{b}\mathfrak{d}_{\mathfrak{B}}\mathfrak{v} \tag{40}$$

Hat die Ebene des Schnittes keine besondere Lage, so lauten die Gleichungen einfacher

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{r} = \{\mathfrak{R}\}_{\mathfrak{B}=0}, \quad \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{w}\mathfrak{i}_1, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{b} = \{\mathfrak{D}\}_{\mathfrak{B}=0}. \tag{41}$$

Die Ordnung w_2 von $\mathfrak{z}_2$, die wir in diesem Falle mit k' bezeichnen wollen, ist dann nach (34) $(\mathfrak{A}, \mathfrak{J}) - 2n$ und die Klasse von $\mathfrak{P}$ ist $a = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$. Wir setzen noch

$$\begin{cases} (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}) = c, & (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) = 2b, & (\mathfrak{A}', \mathfrak{R}') = c', & (\mathfrak{A}', \mathfrak{D}') = 2b' \\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_0) = 2b_0, & (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_0') = \varrho_0', & (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}') = \varrho', & (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}') = \sigma', \\ (\mathfrak{A}', \mathfrak{D}_0') = 2b_0', & (\mathfrak{A}', \mathfrak{D}_0) = \varrho_0, & (\mathfrak{A}', \mathfrak{D}) = \varrho, & (\mathfrak{A}', \mathfrak{R}) = \sigma. \end{cases} \tag{42}$$

Verwenden wir für die ebene Kurve $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}_4 \sim \mathfrak{A}$ die Bezeichnungen in K I, Nr. 4, S. 193, so haben wir

$$\begin{cases} n_1 = n, \quad n_2 = a, \quad w_1 = (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}) = c, \quad w_2 = k' = (\mathfrak{A}, \mathfrak{J}) - 2n, \\ 2m = (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) = 2b, \quad 2m_0 = (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_0) = 2b_0 = 2b - 2c. \end{cases} \tag{43}$$

Aus K, S. 193 (21) ergibt sich für die Zahl m_0' der Doppeltangenten eines allgemeinen ebenen Schnittes

$$2m_0' = a(a-1) - 3w_2 - n. \tag{44}$$

Zwischen den Größen (43) und m_0' bestehen die Plückerschen Gleichungen. Außerdem können wir mit Hilfe der Äquivalenzen in D, S. 221 Gleichungen herleiten. Z. B. ist zufolge D, S. 221 (I′) und (III′)

$$\mathfrak{R}'\mathfrak{A}^3 \sim \mathfrak{J}\mathfrak{A}', \qquad \mathfrak{D}'\mathfrak{J} = \mathfrak{D}_0'\mathfrak{R}'^2\mathfrak{J} \sim \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}'^{n'-2},$$

also

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{R}'\mathfrak{A}^3) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{J}\mathfrak{A}'), \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}'\mathfrak{J}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_0'\mathfrak{R}'^2\mathfrak{J}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}'^{n'-2}).$$

In Verbindung mit (42) und (43) folgt hieraus

$$\sigma' + n = k' + a, \qquad (n'-2)a = \varrho_0' + 2\sigma' + k'. \tag{45}$$

Diese Gleichungen gehören zu den sogenannten Salmonschen Gleichungen. Die zweite entspricht dual der ersten der Formeln (A) auf Seite 650 in Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. Raumes II (3. Aufl.).

II. Berührungskegel.

Die folgenden Betrachtungen sind dual zu denen des Teil I. Daher ügt eine kurze Angabe der Ergebnisse.

1. Die Berührungskurve $\mathfrak{P}$.

Es sei P die Spitze eines Berührungskegels von F. Er berühre F gs der Berührungskurve $\mathfrak{A}'$ und es sei

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}'\mathfrak{P},$$

in $\mathfrak{B}'$ die etwa in $\mathfrak{A}'$ enthaltenen Ebenenkurven zusammengefaßt en. Wir beschränken uns auf den Fall, wo $\mathfrak{P}$ keine Primkurve mehrh enthält. Wir nennen $\mathfrak{P}$ den Berührungskegel mit der Spitze P und $\mathfrak{P}$ den vollen Berührungskegel mit der Spitze P. Es sei P als Ecke 4 Koordinatentetraeders gewählt.

2. Einige Divisoren von $\mathfrak{P}$.

a) Wir bezeichnen den Divisor der mehrfachen Stellen der Kurve $\mathfrak{P}$ er der mehrfachen Ebenen des Kegels $\mathfrak{P}$ als Berührungskegel von F $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$. Er ist definiert wie in I (2). Der volle Divisor der mehrhen Ebenen des Kegels $\mathfrak{P}$, wenn wir ihn ohne Rücksicht auf F bechten, sei $\mathfrak{m}'$. Die Ordnungen von $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{m}'$ seien $2\sigma_{\mathfrak{P}}$ und $2m'$.

b) Es seien $\mathfrak{A}^{(1)}$, $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{A}^{(3)}$ drei ebene Schnitte von F, deren Ebenen ne Gerade gemeinsam haben und durch die Spitze P des Kegels $\mathfrak{P}$ en. Es sei $\mathfrak{d}'$ der größte gemeinsame Teiler der Divisoren, in die die $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ $\mathfrak{P} = 0$ übergehen. Zu $\mathfrak{d}'$ liefern nur Stellen von F einen Beitrag, in en die Spitze P liegt. Wir nennen dabei $\mathfrak{d}'$ den Spitzendivisor von $\mathfrak{P}$. i unserer Wahl des Koordinatensystems können wir $\mathfrak{A}^{(i)} = \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ hlen und es ist

$$\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\mathfrak{P}=0} = \mathfrak{d}'\mathfrak{a}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

l es sind die $\mathfrak{a}_\alpha$ den Punktkoordinaten des Kegels proportional.

3. Der Divisor $\mathfrak{z}_2$ der stationären Ebenen von $\mathfrak{P}$.

Es wird

$$\mathfrak{z}_2 = \frac{\mathfrak{r}'\mathfrak{d}'}{\mathfrak{v}'\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}}.$$

Hieraus schließen wir wie in I, Nr. 3:

Jede Ebenenkurve ist in $\mathfrak{R}'$ enthalten.

Ist $\mathfrak{H}$ eine in $\mathfrak{R}'$ in der ϱ'-ten Potenz enthaltene Primkurve und ne Ebenenkurve und ist S eine reguläre Stelle von $\mathfrak{H}$, so ist die Be-

rührungsebene von F in S für einen Berührungskegel, dessen Spitze in der Ebene liegt, aber sonst keine besondere Lage hat, stationär von der Ordnung ϱ'.

4. Der volle Divisor $\mathfrak{m}'$ der mehrfachen Ebenen von $\mathfrak{P}$.

Es wird

$$\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_0' \mathfrak{d}_2^2 = \mathfrak{d}' \mathfrak{d}_\mathfrak{P} \mathfrak{v}'. \tag{4}$$

Hieraus schließen wir:

Es ist $\mathfrak{D}'$, abgesehen von Ebenenkurven, durch $\mathfrak{R}'^2$ teilbar. Setzen wir

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{R}'^2 \mathfrak{D}_0', \tag{5}$$

so sind $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}_0'$ bis etwa auf Ebenenkurven ganze Kurven.

Es ist $\mathfrak{D}_0'$ die Kurve der Berührungspunkte der F mehrfach berührenden Ebenen.

5. Der Divisor $\mathfrak{d}_1$ der stationären Kanten von $\mathfrak{P}$.

Es sei g jetzt eine durch die Spitze P des Kegels $\mathfrak{P}$ gehende Gerade. Die Kurven $\mathfrak{J}_0$ mögen für $\mathfrak{P} = 0$ in die Divisoren $\mathfrak{i}_0$ übergehen und diese mögen den von g unabhängigen Faktor $\mathfrak{i}_1'$ haben, vorausgesetzt, daß g durch P geht. Wir setzen

$$\mathfrak{i}_0 = \mathfrak{i}_1' \mathfrak{i}_2'. \tag{6}$$

Es wird

$$\mathfrak{d}_1 = \frac{\mathfrak{w} \mathfrak{i}_1'}{\mathfrak{v}' \mathfrak{d}_\mathfrak{P} \mathfrak{b}'^2}. \tag{7}$$

Ist $\mathfrak{B}' = 1$, also $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{A}'$, so ergibt sich dual zu I (34) als Ordnung von $\mathfrak{w}\mathfrak{i}_1'$

$$[\mathfrak{w}\mathfrak{i}_1'] = (\mathfrak{J}\mathfrak{A}') - 2n', \tag{8}$$

Hat P keine besondere Lage, so liefern zu $\mathfrak{i}_1'$ die Stellen von F einen Beitrag, deren eine Inflexionstangente alle durch P gehenden Geraden g trifft, also durch P geht. Rechnen wir wieder alle Tangenten, die F in den Stellen der Flachkurve $\mathfrak{W}$ hat, zu den Inflexionstangenten von F, so haben wir:

Hat die Spitze eines Berührungskegels keine besondere Lage, so sind die durch die Spitze gehenden Inflexionstangenten von F die stationären Kanten des Kegels.

Ferner haben wir:

Die Zahl der durch einen Punkt P ohne besondere Lage gehenden Inflexionstangenten von F ist

9) $$i_p = (\mathfrak{F}, \mathfrak{A}') - 2n.$$

6. Zahl der Inflexionstangenten durch zwei Gerade.

Wir bestimmen noch die Zahl der Inflexionstangenten durch zwei Gerade. Wir nehmen zur Geraden g noch eine zweite g' hinzu und es sei $\mathfrak{G}$ die Kurve der Stellen von F, von denen eine Tangente g und g' trifft (vgl. D, S. 194, 195). Es seien $S_1', S_2', \ldots, S_{n'}'$ die n' Stellen, wo die durch g gehenden Ebenen von F die Fläche F berühren und $S_1, S_2, \ldots, S_n$ seien die n Schnittstellen von g mit F. Da g keine besondere Lage hat, so sind die $n + n'$ Stellen S_i, S_i' reguläre Stellen von F. Durch diese Stellen geht $\mathfrak{F}_0$, wie wir in I, Nr. 5 sahen, doppelt. Die Kurve $\mathfrak{G}$ geht, wie eine genauere Betrachtung zeigt, einfach durch diese Stellen, ohne $\mathfrak{F}_0$ zu berühren, so daß die Zahl der Schnittpunkte, die $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{G}$ in diesen Stellen haben, gleich $2n + 2n'$ ist. Wenn g und g' eine besondere Lage haben, geht keine der Inflexionstangenten dieser Stellen durch g'.

Es sei jetzt S eine von den Stellen S_i' und S_i verschiedene Schnittstelle von $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{G}$. Dann geht eine Inflexionstangente t von S durch g und eine Tangente t' von S durch g und g'. Wäre t nicht mit t' identisch, so würden zwei verschiedene Tangenten von F in S durch g gehen, d. h. es wäre S entweder eine der Stellen S_i oder S_i'. Daher ist t mit t' identisch und es geht eine Inflexionstangente von S durch g und g'. Da umgekehrt S auf $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{G}$ liegen muß, wenn eine Inflexionstangente von S durch g und g' gehen soll, so ergibt sich für die Zahl der durch zwei Gerade gehenden Inflexionstangenten der Wert $(\mathfrak{F}_0, \mathfrak{G}) - 2n - 2n'$. Rechnen wir die uneigentlichen Inflexionstangenten mit, d. h. die Tangenten von F in den Stellen von $\mathfrak{W}$, so wird diese Zahl um $(\mathfrak{W}, \mathfrak{G})$ erhöht. Da nach D, S. 221 (VII) $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, so haben wir:

Die Zahl i_g der durch zwei Gerade ohne besondere Lage gehenden Inflexionstangenten von F ist

10) $$i_g = (\mathfrak{F}, \mathfrak{A}\mathfrak{A}') - 2n - 2n'.$$

Nach I (36), (9) und (10) ist

11) $$i_g = i_P + i_e,$$

wie es nach einem Satze von Halphen über Strahlenkongruenzen sein muß.

Endlich haben wir noch:

Ist $\mathfrak{H}$ eine Flachkurve der Flachordnung φ, die keine Ebenenkurve ist und ist S eine reguläre Stelle von $\mathfrak{H}$, so ist für einen Berührungskegel, dessen Spitze P in der Berührungsebene von F in S liegt, die Kante PS stationär von der Ordnung φ.

7. Die Klasse und die Ordnung von $\mathfrak{P}$.

Die Klasse von $\mathfrak{P}$ ist n', gleich der Klasse von F.

Die Ordnung n_1 von $\mathfrak{P}$ ist

$$n_1 = a - (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}') - b', \tag{11}$$

wenn b' die Ordnung von $\mathfrak{b}'$ ist. *Für einen Berührungskegel ohne besondere Lage ist also die Ordnung gleich a, d. h. gleich der Klasse eines allgemeinen ebenen Schnittes.*

8. Salmonsche Gleichungen.

Bezeichnen wir mit $k = w_1$ die Zahl der stationären Kanten eines allgemeinen Berührungskegels, so bestehen dual zu I (45) die Salmonschen Gleichungen

$$\sigma + n' = k + a, \qquad (n-2)a = \varrho_0 + 2\sigma + k. \tag{12}$$

Halle a. d. Saale, Mai 1921.

(Eingegangen am 8. Juli 1921.)

Die Tangentenlosigkeit der von Kochschen Kurve.

Von

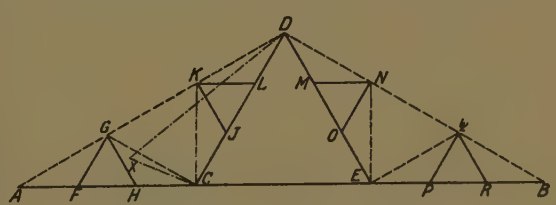
Fritz Apt in Berlin.

Die vorliegende Arbeit ist ein Teil einer mehr historisch gerichteten rbeit, die ich als Dissertation in Kiel in den Jahren 1917/18 einge-icht habe, deren Ergebnisse aber fast sämtlich (bis auf den zweiten Be-eis der Tangentenlosigkeit der von Kochschen Kurve) aus der Vorkriegszeit ammen. Ein kurzer Auszug dieser Dissertation ist in den Sitzungs-richten der Berl. Math. Gesellschaft 1920, S. 85—88 ohne Beweisführung schienen. Hier sollen lediglich die beiden dort skizzierten Beweise für e Tangentenlosigkeit der von Kochschen Kurve gegeben werden.

§ 1

Eine Kurve heiße in einem Punkt P_0 „*völlig tangentenlos*", wenn e von P_0 aus gezogenen vorwärts genommenen Sekanten, für sich ge-ommen, und ebenso die rückwärts genommenen Sekanten sich keiner renzlage annähern. Es darf also weder eine Ecke noch eine Spitze in esem Punkte vorhanden sein, während beispielsweise Helge von Koch lbst den Begriff der Tangentenlosigkeit soweit faßt, daß auch Ecken und pitzen noch vorkommen können. Für den Beweis der völligen Tangenten-sigkeit ist es daher nötig, zu zeigen, daß zu jedem Kurvenpunkte P_0 dessen Nachbarschaft immer wieder zwei Punkte P_n' und P_n'' (die *beide* f P_0 folgen) aufgefunden werden können, so daß der Winkel $P' P_0 P''$ ößer bleibt als eine angebbare endliche Größe.

Die Konstruktion der von Kochschen Kurve ist wie bekannt folgende: an teile eine Strecke AB rch die Punkte C und E drei gleiche Teile (siehe igur), errichte auf dem ittleren Teile CE das eichseitige Dreieck CDE.



Dasselbe Konstruktionsverfahren wende man auf jede der vier neue Strecken AC, CD, DE, EB usw. an. Die positive Richtung s $ACDEB$. Die Eckpunkte sämtlicher so entstandenen gleichseitige Dreiecke und deren Häufungspunkte bildet die von Kochsche Kurv Daß die Punkte der von Kochschen Kurve sich den Punkten einer gerade Linie eindeutig zuordnen lassen, daß ferner die von Kochsche Kurve kein Doppelpunkte besitzt, ist bereits von H. v. Koch[1]) auf mehr arithmetischem von Knopp[2]) auf mehr geometrischem Wege bewiesen worden. Ich setz also als bewiesen voraus, daß die von Kochsche Kurve eine doppelpunktslose Jordansche Kurve ist.

Man bezeichne nun die Eckpunkte A, C, D, E, B des durch die ers Operation entstandenen gebrochenen Linienzuges als „*Eckpunkte erste Ordnung*", die Eckpunkte des durch die zweite Operation entstandene gebrochenen Linienzuges $A, F, G, H - C, J, K, L - D, M, N, O$ usw. a „*Eckpunkte zweiter Ordnung*" usf., ferner das gleichschenklige Dreiec ADB als „*gleichschenkliges Dreieck erster Ordnung*", die vier Dreieck AGC, CKD, DNE und EQB als „*gleichschenklige Dreiecke zweite Ordnung*" usw.; dann liegen im „gleichschenkligen Dreieck erster Ord nung" ADB die vier „gleichschenkligen Dreiecke zweiter Ordnung" un in diesen die 16 „gleichschenkligen Dreiecke dritter Ordnung" usw. I liegen somit die Eckpunkte aller Ordnungen und daher auch deren Hä fungspunkte im Innern oder auf dem Rande des „gleichschenkligen Dre ecks erster Ordnung". In gleicher Weise liegen alle zwischen den Eck punkten erster Ordnung A und C gelegenen Kurvenpunkte im Inner oder auf dem Rande des „gleichschenkligen Dreiecks zweiter Ordnung AGC. Allgemein liegen die zwischen zwei aufeinander folgenden Eck punkten n-ter Ordnung gelegenen Kurvenpunkte im Innern oder auf der Rande des zugehörigen „*gleichschenkligen Dreiecks* $(n+1)$-*ter Ordnung*

Es sei nunmehr X ein beliebiger Kurvenpunkt, er liege zwischen und C, also im ersten der vier „gleichschenkligen Dreiecke zweiter Ord nung"; dann verbinde ich X mit den beiden auf ihn folgenden Eckpunkte erster Ordnung C und D. Der von den beiden Sekanten eingeschlossen Winkel ist dann $DXC \geqq DAC = 30^0$, weil X im Innern oder auf der Rande des Dreiecks ADC liegt. Liegt X im zweiten der „gleichschenk ligen Dreiecke zweiter Ordnung", so ziehe ich die Sekanten XD und XE Der von ihnen eingeschlossene Winkel ist gleichfalls dann $DXE \geqq DAE = 30^0$ weil X im Dreieck DAE liegt. Ebenfalls ist, falls X im dritten de

[1]) Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géom trique élémentaire. (Ark. f. Math. Astr. och Fys. 1, 1904, S. 681–702.

[2]) Einheitliche Erzeugnng und Darstellung der Kurven von Peano, Osgoo und v. Koch, Arch. d. Math. u. Phys. (3) 26, 1918, S. 103–115.

leichschenkligen Dreiecke zweiter Ordnung" liegt, $\sphericalangle BXE \geqq BDE = 30^0$.
lassen sich, abgesehen von dem Falle, daß X im vierten gleichschenk-
en Dreieck liegt, stets zwei vorwärts genommene Sekanten angeben,
ren Richtungen mindestens um 30^0 voneinander verschieden sind.

Da diese Betrachtungen sich in derselben Weise auf die Eckpunkte
ter Ordnung übertragen lassen, so kann man sagen: Abgesehen von dem
lle, daß im Kurvenpunkt X von einer bestimmten Stelle ab immer
r im vierten „gleichschenkligen Dreieck n-ter Ordnung" liegt, lassen
h in der Nachbarschaft von X stets geeignete vorwärts genommene Se-
nten ziehen, die voneinander um mindestens 30^0 in ihrer Richtung ab-
ichen. Die vorwärts genommenen Sekanten nähern sich also keiner
enzlage, es ist keine vorwärts genommene Tangente möglich. Kommt
er X von einer gewissen Stelle ab immer nur in einem vierten „gleich-
nenkligen Dreieck n-ter Ordnung" vor, dann ist X selbst Eckpunkt
gendeiner Ordnung und für ihn existiert ebenfalls keine vorwärts ge-
mmene Tangente. Da dieselbe Betrachtung in gleicher Weise auch für
e rückwärts genommenen Sekanten gelten, so ist damit bewiesen, daß
e von Kochsche Kurve weder vorwärts noch rückwärts in irgendeinem
nkte eine Tangente besitzen kann. Die von Kochsche Kurve ist also
rklich völlig tangentenlos.

§ 2.

Der zweite Beweis für die völlige Tangentenlosigkeit der von Kochschen
urve beruht auf der Erweiterung eines Kriteriums, das sich auf das
hlen eines endlichen einseitigen Differentialquotienten bezieht. Dieses
iterium lautet:

„Eine Funktion hat im Punkte x_0 keinen *einseitigen* endlichen Differentialquotienten, wenn sich *auf dieser Seite* eine Folge gegen x_0 konvergierender Punktepaare (x_n', x_n'') angeben läßt, für welche der *einseitige* Differenzenquotient sich keiner endlichen Grenze annähert, vorausgesetzt, daß $|x_n'' - x_n'|$ im Vergleich zu $|x_n' - x_0|$ nicht unendlich klein wird.

Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, die Funktion hätte
der Stelle $x = x_0$ einen rechts genommenen Differentialquotienten
$(x_0 + 0) = D$, dann müßten in hinreichender Nähe folgende Gleichungen
lten:

$$f(x_n'') - f(x_0) = D(x_n'' - x_0) + \varepsilon_n''(x_n'' - x_0)$$
$$f(x_n') - f(x_0) = D(x_n' - x_0) + \varepsilon_n'(x_n' - x_0)$$
$$f(x_n'') - f(x_n') = D(x_n'' - x_n') + \varepsilon_n''(x_n'' - x_0) - \varepsilon_n'(x_n' - x_0).$$

Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch $x_n'' - x_n'$ und berücksichtigt, daß die Quotienten $\left|\frac{x_n'' - x_0}{x_n'' - x_n'}\right|$ und $\left|\frac{x_n' - x_0}{x_n'' - x_n'}\right|$ unterhalb einer endlichen Grenze bleiben, die Werte von ε schließlich unendlich klein werden, so würde daraus folgen, daß auch der Differenzenquotient $\frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'}$ sich dem Werte D annähern müßte. Das ist aber gegen die Voraussetzung.

Dieses Kriterium gestattet, aus dem Verhalten der *einseitigen* Differenzenquotienten einen Rückschluß zu ziehen auf die Existenz des *einseitigen* Differentialquotienten, während in der Literatur über die Theorie der nichtdifferentiierbaren Funktionen meistenteils nur das Fehlen eines *zweiseitigen* Differentialquotienten aus dem Verhalten des *zweiseitigen* Differenzenquotienten geschlossen wird. Zu betonen ist, daß die beschränkende Voraussetzung, daß $|x_n'' - x_n'|$ im Vergleich zu $|x_n' - x_0|$ nicht unendlich klein wird, notwendig ist, wie man es an der Funktion $x^2 \sin \frac{1}{x}$ für $x = 0$ ersehen kann. Obwohl in der Nähe von $x = 0$ der Differenzenquotient dauernd hin und her schwankt, gibt es doch einen bestimmten endlichen Differentialquotienten an der Stelle $x = 0$. Dagegen ist nicht notwendig, daß die Funktion eindeutig ist. Es gilt auch für Jordansche Kurven, die in der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ (φ und ψ stetig) dargestellt werden. Nur muß man darauf achten, daß für das Fehlen einer einseitigen schrägen Tangente im Punkte $P_0(x_0 y_0 t_0)$ nur eine Folge von solchen Punktepaaren P_n', P_n'' $(t_0 < t_n' < t_n'')$ verwandt werden darf, für die nicht nur die Koordinaten x, y gegen x_0, y_0, sondern auch die Parameter t gegen t_0 konvergieren; denn von der Eindeutigkeit ist bei der Beweisführung nirgends Gebrauch gemacht worden.

§ 3.

Bei der Verallgemeinerung dieses Kriteriums auf Jordansche Kurven $[x = \varphi(t),\ y = \psi(t)]$ tritt eine Änderung der Bedingungen insofern ein, daß anstatt der Projektionen der Sehnen auf die X-Achse diese Sehnen selbst treten.

„Läßt sich in der Nähe eines Punktes P_0 eine Folge von auf P_0 folgenden Punktepaaren P_n', P_n'' angeben, für welche die Größe der Sehne $\overline{P_n' P_n''}$ nicht unendlich klein wird im Vergleich zu $\overline{P_0 P_n'}$,[1] so existiert in P_0 *keine vorwärts* gezogene Tangente, wenn diese Sekanten $P_n' P_n''$ sich keiner Grenzlage annähern".

[1]) D. h. $\overline{P_n' P_n''} > k \cdot \overline{P_0 P_n'}$, k fest.

Zunächst kann man sich darauf beschränken, das Fehlen einer schrä-
n Tangente nachzuweisen. Denn man kann ja das Koordinatensystem
ehen, da ja die Größen, die einer beschränkenden Voraussetzung unter-
rfen sind, vom Koordinatensystem unabhängig sind. Ebenso kann ohne
eschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß die Sekanten
n der vertikalen Richtung eines geeignet gelegten Koordinatensystems
ihrer Richtung um einen Winkel abweichen, der größer ist als eine
eine aber feste Größe δ.[4]) Bezeichnet man dann den Winkel, den
$\overline{P_0 P_n'}$ mit der X-Achse bildet, mit α und den Winkel, den $\overline{P_n' P_n''}$ mit
r X-Achse bildet, mit β, dann ist:

$$(x_n'' - x_n') : (x_n' - x_0) = \overline{P_n' P_n''} \cos\beta : \overline{P_0 P_n'} \cos\alpha.$$

Ersetzt man $\cos\beta$ durch die kleinere Größe $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$ und $\cos\alpha$
rch 1 in der vorangehenden Proportion, so ist

$$\frac{x_n'' - x_n'}{x_n' - x_0} > \frac{\overline{P_n' P_n''}}{\overline{P_0 P_n'}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right).$$

Da aber der Bruch $\frac{\overline{P_n' P_n''}}{\overline{P_0 P_n'}}$ der Voraussetzung nach größer als k ist,
ist $\frac{x_n'' - x_n'}{x_n' - x_0}$ größer als $k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = k'$.

Der weitere Beweis ist derselbe wie in § 2. Angenommen, es gäbe
ne vorwärts genommene schräge Tangente mit dem Richtungsfaktor D,
müßten sich in hinreichender Nähe alle Kurvenpunkte, die auf P_0
lgen, in einen beliebig schmalen Winkelraum einschließen lassen. Da
n $x_n'' - x_n'$ nicht unendlich klein wird im Vergleich zu $x_n' - x_0$, so folgt
it Hilfe derselben Gleichung wie in § 2, daß die Sekanten sich derselben
ichtung annähern müßten, wie sie die Tangente besitzen würde. Das
er geht gegen die Voraussetzung. Der Unterschied des erweiterten
riteriums von dem Kriterium in § 2 besteht darin, daß in § 2 noch
ne einseitige vertikale Tangente möglich ist, hier aber auch diese aus-
schlossen ist, da man ja das Koordinatensystem drehen kann. In § 2
t eine Drehung nicht möglich, weil die Voraussetzungen, unter denen
s Kriterium gültig ist, vom Koordinatensystem nicht unabhängig sind.

---

[4]) Wählt man δ hinreichend klein, so bleiben nach Weglassung der Sekanten, deren Abweichungen von der vertikalen Richtung geringer als δ sind, immer noch unendlich viele Sekanten in beliebiger Nähe von P_0 mit den verlangten Eigenschaften übrig.

§ 4.

Bei der Kochschen Kurve sind die Voraussetzungen des erweiterte Kriteriums ohne weiteres erfüllt. Versteht man unter der Sehne $\overline{P_n' P}$ die erste oder die zweite auf P_0 folgende Sekante n-ter Ordnung, so ist $\frac{\overline{P_n' P_n''}}{\overline{P_0 P_n'}} > \frac{1}{3}$. Diese Sekanten aber bilden einen Winkel von 60^0 miteinander. Lasse ich n unendlich groß werden, so folgt daraus, daß die Kurve völlig tangentenlos ist. Im Anschluß an Helge von Koch hat Knopp Kurven konstruiert, die eine Verallgemeinerung der Kochschen Kurve darstellen. Statt eines gleichseitigen Dreiecks läßt Knopp auch ungleichseitige Dreiecke zu. Die Tangentenlosigkeit behauptet Knopp auch von seinen Kurven nur insofern, als die zweiseitigen Sekanten sich keiner Grenzlage annähern. Durch seinen Beweis sind Ecken und Spitzen nicht ausgeschlossen. Auch hier wird in den Fällen, in denen die Bedingungen des erweiterten Kriteriums zutreffen, die völlige Tangentenlosigkeit erreicht; und damit ist für Jordansche Kurven das Problem endgültig erledigt.

(Eingegangen am 15. Dezember 1920.)

ie windschief involutorischen Paarungen in einer linea- en Strahlenkongruenz und die beiden Arten windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

Das Studium der Realitätsbedingungen für das Decktetraeder zweier ollinearen Räume bestimmte mich, involutorische lineare Strahlenkon- ruenzen in den Bereich meiner Untersuchungen zu ziehen. Eine Theorie olcher Kongruenzen fehlt bisher; es sind sogar deren Grundeigenschaften nbekannt geblieben.

Ich gelange im folgenden, ausgehend von einfachen Sätzen über ge- hart kollineare Räume, zunächst zu dem von einer Regelschar zweiter rdnung getragenen Büschel projektiver Regelscharen zweiter Ordnung. Während aber der Büschel projektiver Punktreihen auf einem Kegelschnitte ine und nur eine Projektivitätsachse bedingt, bedingt der Büschel pro- ktiver Regelscharen zweiter Ordnung ∞^2 Projektivitätsachsen, und diese ilden eine lineare Kongruenz.

Die Fundamentalsätze aus der Theorie des Büschels projektiver Regel- charen zweiter Ordnung gestatten die Theorie zweier durch eine halb- escharte Kollineation erster Art aufeinander bezogenen Räume weiter uszubauen und auf deren Theorie die der windschief involutorischen linearen trahlenkongruenzen zu begründen. Hierbei wird die windschief involutorische neare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ definiert als die Gesamtheit der ∞^2 einander doppelt entsprechenden Strahlen zweier durch eine halb- escharte Kollineation erster Art aufeinander bezogenen Räume. Sie ist usammen mit ihrem Träger C_1^1 hyperbolisch oder elliptisch. Eine wind- chief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ ist durch zwei hrer Strahlenpaare bestimmt, die nicht in einer Regelschar zweiter Ord- nung liegen. Die Strahlenpaare von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ bestehen aus gemein- amen reziproken Polaren für die Flächen eines F^2-Büschels; die polaren

Räume der Flächen des Büschels sind sekundäre polare Räume des Tri gers C_1^1 der windschief involutorischen Kongruenz. Überhaupt ist eir Korrelation, welche die einander zugeordneten Strahlen einer windschi involutorischen linearen Strahlenkongruenz paarweise miteinander vertausch stets polar. Eine windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz ha vier Doppelstrahlen, die paarweise konjugiert imaginär sein können.

Die hyperbolischen windschief involutorischen linearen Strahlenkon gruenzen zerfallen in die erster, zweiter oder dritter Art, je nachdem ihr vier Doppelstrahlen von zwei Paaren reeller oder zwei Paaren konjugier imaginärer windschiefen Strahlen oder endlich von zwei Paaren konjugier imaginärer Strahlen erster Art gebildet werden. Jede elliptische winc schief involutorische lineare Strahlenkongruenz hat zwei reelle und zwe konjugiert imaginäre Doppelstrahlen. In jeder elliptischen windschief in volutorischen linearen Strahlenkongruenz und in jeder hyperbolischen erste und zweiter Art sind zwei Scharen von ∞^1 reellen involutorischen Regel scharen zweiter Ordnung enthalten. Die Regelscharen jeder Schar liege auf den Flächen je eines F^2-Büschels. Beide F^2-Büschel sind, wie sic dann zeigt, mit bemerkenswerten Eigenschaften dieser windschief involu torischen linearen Strahlenkongruenzen verknüpft. — Alle durch halbge scharte Kollineationen erster Art auf den Raum Σ bezogenen Räume Σ_i die mit ihm dieselbe windschief involutorische lineare Strahlenkongruen $C_1^1(aa_i, ss_i)$ bestimmen, bilden eine Büschelschar geschart kollineare Räume mit der Basiskongruenz C_1^1. Die konjugiert imaginären windschiefe Strahlen einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 werden durch hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenzen au dem Träger H_1^1 definiert, die einer elliptischen E_1^1 durch elliptische wind schief involutorische lineare Strahlenkongruenzen auf dem Träger E_1^1. Recht einfach ergeben sich die gemeinsamen Elementenpaare kollokale windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen, wobei einige von v. Staudt behandelte Fragen aus der Theorie geschart involutorische Räume eine befriedigende organisch sich aufbauende Lösung finden.

Es gibt nur eine Kollineation φ_i, die eine gegebene windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst überführt, dabei deren Doppelstrahlen in Ruhe läßt und zwei gegebene Punkte P, P_i oder Ebenen π, π_i einander zuweist. Je nachdem $C_1^1(aa_i, ss_i)$ hyperbolisch erster, zweiter oder dritter Art oder elliptisch ist, erfüllt das Decktetraeder der durch die Kollineation φ_i aufeinander bezogenen Räume andere Realitätsbedingungen. Wir kommen so zu einer sehr anschaulichen und übersichtlichen Einteilung dieser Bedingungen und im Laufe der zugehörigen Untersuchung zu einer einfachen Klassifikation der Tetraeder überhaupt.

Mit einer windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz sind gleich noch zwei andere windschief involutorische lineare Strahlenkonenzen gegeben. Jede der drei bestimmt auf die nämliche Weise die iden übrigen. Die Kollineation φ_i zweier kollinearen Räume Σ, Σ_i mit em einzigen Decktetraeder ist auf die gleiche Art bestimmt durch jede r drei windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen, die durch in sich selbst übergeführt werden und durch zwei gegebene homologe nkte P, P_i oder Ebenen π, π_i von Σ, Σ_i.

Neben der windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz steht singuläre windschief involutorische. Je zwei Strahlenpaare einer sinlären windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ nnen durch eine Regelschar zweiter Ordnung verbunden werden. Jedes der rahlenpaare besteht aus reziproken Polaren eines primären polaren Raumes r Trägerkongruenz C_1^1, d. h. aus reziproken Polaren für eine in C_1^1 einnarig enthaltene (reelle oder imaginäre) Regelfläche zweiten Grades. Die ppelstrahlen einer singulären windschief involutorischen linearen Strahlenngruenz bilden eine reelle oder imaginäre Regelfläche zweiter Ordnung. einer linearen Kongruenz ist eine singuläre windschiefe Involution durch ei ihrer Strahlenpaare bestimmt. Eine singuläre windschief involutorihe Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ enthält ∞^3 involutorische Regelscharen zweiter dnung, sie liegen auf den Flächen eines F^2-Bündels. Die singulären ndschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen sind hyperbolisch er elliptisch, je nachdem ihre Träger zwei reelle oder zwei konjugiert aginäre Leitgeraden haben. Alle singulären hyperbolischen windschief volutorischen linearen Strahlenkongruenzen, ebenso wie alle singulären iptischen windschief involutorischen Strahlenkongruenzen erster Art, entlten eine reelle, aus ihren Doppelstrahlen bestehende Regelschar zweiter dnung. Diese Regelschar ist bei den singulären elliptischen windschief volutorischen linearen Strahlenkongruenzen zweiter Art imaginär. Durch le der ∞^2 involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung einer singulären ndschief involutorischen linearen Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ ist derselbe llraum bestimmt. In ihm sind je zwei einander zugeordnete Strahlen n $C_1^1(aa_i, ss_i)$ einander zugeordnet, und sein linearer Strahlenkomplex thält die Leitscharen der ∞^2 involutorischen Regelscharen.

Der geschart involutorische Raum enthält ∞^4 windschief involutorihe und ∞^4 singuläre windschief involutorische lineare Strahlenkongruenzen, r polare Raum ebenfalls ∞^4 windschief involutorische, aber nur ∞^2 singläre. Beide Arten involutorischer linearen Strahlenkongruenzen des einen d des andern involutorischen Raumes stehen in enger Beziehung zu den jedem von ihnen enthaltenen involutorischen Regelflächen zweiten Grades.

A. Der Büschel projektiver Regelscharen zweiter Ordnung.

1. *Zwei kollineare Felder η, η_i, in denen zwei projektive zu einer Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ perspektive Kegelschnitte e^2, e_i^2 einander entsprechen, haben den Strahl $\eta\,\eta_i = s$ zum Deckstrahle. Die homologen Punktreihen von η, η_i auf s liegen in einem Büschel projektiver Punktreihen, dessen charakteristische Involution aus den für die Fläche von $\mathfrak{R}^2$ konjugierten Punkten von s besteht.*

Durch s und je drei Strahlen von $\mathfrak{R}^2$ ist nämlich eine lineare Strahlenkongruenz bestimmt, in der die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ und der Strahl s liegen. Die Strahlen der Kongruenz beziehen die Ebenen der Kegelschnitte e^2, e kollinear so aufeinander, daß die bzw. in den kollinearen Feldern η, η enthaltenen zu $\mathfrak{R}^2$ perspektiven, also zueinander projektiven Kegelschnitte e^2, e_i^2 einander entsprechen, und der Kongruenzstrahl $\eta\,\eta_i = s$ ein Deckstrahl wird[1]). Zwei homologe zu e^2 und e_i^2 perspektive Strahlenbüschel erster Ordnung P, P_i von η, η_i werden nun aus den beiden bzw. mit den Punkten P, P_i inzidenten Leitstrahlen p, p_i von $\mathfrak{R}^2$ durch zwei zu $\mathfrak{R}$ perspektive und zueinander projektive Ebenenbüschel projiziert. Die homologen Punktreihen von η, η_i auf s sind folglich projektive Punktreihen eines Büschels[2]), dessen charakteristische Involution die durch die Fläche der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ auf s bedingte Involution konjugierter Punkte ist.

2. Eine Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ und zwei von ihrer Leitschar getragene projektive Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$ und $\mathfrak{L}_i^2(p_i, q_i, r_i, \ldots)$ bestimmen zwei kollineare Räume Σ, Σ_i, in denen die Strahlen der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ Deckstrahlen sind und die beiden projektiven Regelscharen einander entsprechen[3]). Wird auf einem gegebenen zu $\mathfrak{R}$ perspektiven Kegelschnitte e^2 von Σ die Regelschar $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$ perspektiv bezogen, so ist zu dem e^2 in Σ_i entsprechenden Kegelschnitte e_i^2 von $\mathfrak{R}^2$ die Regelschar $\mathfrak{L}_i^2(p_i, q_i, r_i, \ldots)$ perspektiv. Die einander entsprechenden Ebenen η, η_i von e^2, e_i^2 sind mit einem Deckstrahle s der Räume Σ, Σ_i inzident (1.). Alle Regelscharen zweiter Ordnung, die mit je zwei Strahlen der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ verbinden, liegen nun in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 und enthalten drei und folglich lauter Deckstrahlen der kollinearen Räume Σ, Σ_i. Durch einen gegebenen Punkt P gehen stets mit s und zwei Strahlen von $\mathfrak{R}^2$ inzidente Strahlen. Sonach

---

[1]) Reye, Lehrsätze über das Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse und den linearen Strahlenkomplex, Journ. f. d. reine und angew. Math. 69 (1868) Nr. 1.

[2]) Jolles, Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen, Journ. f. d. reine und angew. Math. 149 (1919), Nr. 8.

[3]) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856, Nr. 8.

t durch P ein Strahl von C_1^1. Die Deckstrahlen von Σ, Σ_i bilden
nit die durch den Strahl s und die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ gehende und dadurch
timmte lineare Kongruenz C_1^1. Die Kollineation der Raume Σ, Σ_i ist
o geschart. Kurz:

Eine Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ und zwei von ihrer Leitschar
ragene projektive Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$ und
$(p_i, q_i, r_i, \ldots)$ bestimmen zwei geschart kollineare Räume Σ, Σ_i, in
nen die Strahlen von $\mathfrak{R}^2$ Deckstrahlen sind und die Regelscharen
$(p, q, r, \ldots)$ und $\mathfrak{L}_i^2(p_i, q_i, r_i, \ldots)$ einander entsprechen.

Die für die Fläche R^2 von $\mathfrak{R}^2$ konjugierten Punkte auf dem Deck-
ahle s sind durch die Kongruenz C_1^1 einander zugeordnet[4]). $\mathfrak{R}^2$ kann
le einscharig in C_1^1 enthaltene Regelfläche zweiten Grades sein. Somit
ließen wir mit Hilfe des in 1 bewiesenen Satzes:

Die beiden homologen Punktreihen auf jedem Deckstrahle zweier
schart kollinearen Räume Σ, Σ_i liegen in einem Büschel projektiver
nktreihen, dessen charakteristische Involution in dem geschart involu-
ischen Raume der Deckstrahlenkongruenz von Σ, Σ_i enthalten ist.

3. Haben zwei kollineare Räume Σ, Σ_i drei windschiefe Deckstrahlen
b, c, so sind alle Strahlen der Regelschar zweiter Ordnung abc Deck-
ahlen von Σ, Σ_i. Die Kollineation von Σ, Σ_i läßt nicht nur die
rahlen der Regelschar abc in Ruhe, sondern weist auch der Leitschar $\mathfrak{L}^2$
n abc eine mit ihr kollokale projektive Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{L}_i^2$
. Sie ist folglich geschart (2.), und es gilt:

Zwei kollineare Räume sind geschart, sobald sie drei windschiefe
eckstrahlen haben[5]).

4. Schneiden zwei Ebenen η, η_i einer Gerade s eine Regelschar
eiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ bzw. in den Kegelschnitten e^2, e_i^2, und sind die von
r Leitschar von $\mathfrak{R}^2$ getragenen Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$
d $\mathfrak{L}_i^2(p_i, q_i, r_i, \ldots)$ bzw. zu e^2 und e_i^2 perspektiv, so sind diese Regel-
haren durch die zu $\mathfrak{R}^2$ perspektiven Kegelschnitte e^2, e_i^2 projektiv auf-
nander bezogen. Die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ und die beiden projektiven Regel-
haren $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$ und $\mathfrak{L}_i^2(p_i, q_i, r_i, \ldots)$ in ihrer Leitschar bestimmen
ei geschart kollineare Raume Σ, Σ_i, deren Kollineation die Strahlen
n $\mathfrak{R}^2$ in Ruhe läßt und der Regelschar $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$ die Regelschar

---

[4]) v. Staudt, a. a. O., Nr. 105.

[5]) Diesen Satz hat zuerst Herr G. Kohn in seiner Abhandlung: Über zwei be-
ndere Arten von Raumkollineationen und die Figur zweier Tetraeder, Sitzungsber.
math.-naturw. Klasse d. Akad. d. Wissensch., Wien 1911, 120, Abt. IIa, S. 125
ne Beweis angegeben. Reye verifizierte ihn in seiner Notiz: Über ein Kriterium
r gescharten Kollineation. Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe 19 (1912), S. 1.

$\mathfrak{L}_i^2(p_i, q_i, r_i, \ldots)$ zuweist (2.). Beschreibt die Ebene η_i den Büschel s so ergeben sich ∞^1 auf Σ durch gescharte Kollineationen bezogene Räume Σ_i. Einer von ihnen bildet mit Σ einen geschart involutorischen Raum. Die lineare Kongruenz C_1^1 seiner Doppelstrahlen verbindet den Strahl s mit der Regelschar $\mathfrak{R}^2$.

Bekanntlich bilden die ∞^1 erhaltenen geschart kollinearen Räume eine Büschelschar. Der zu Σ involutorische Raum der Büschelschar bildet mit Σ ihren „charakteristischen involutorischen Raum" oder kurz ihre „charakteristische Involution". Jeder Doppelstrahl der charakteristischen Involution ist ein gemeinsamer Deckstrahl aller Räume der Büschelschar. Die Doppelstrahlenkongruenz der charakteristischen Involution ist also gleichzeitig die Deckstrahlenkongruenz aller in der Büschelschar enthaltenen geschart kollinearen Räume und wird als die „Basiskongruenz" der Büschelschar bezeichnet. Alle Büschelscharen geschart kollinearer Räume enthalten den identisch involutorischen Raum. Je zwei Räume der Büschelschar sind durch deren Basiskongruenz und ein Paar homologer Punkte oder Ebenen der Räume bestimmt.

Aus dem zweiten Hauptsatze von 2 folgt nunmehr ohne weiteres:

Die homologen Punktreihen und Ebenenbüschel erster Ordnung in den Räumen einer Büschelschar geschart kollinearer Räume bilden zu ihr perspektive Büschel projektiver Punktreihen und projektiver Ebenenbüschel. Die charakteristischen Involutionen dieser Büschel liegen in der charakteristischen Involution der Büschelschar.

Die Projektivitäten homologer Punktreihen zweier kollinearen Räume sind in den Kollineationen der Räume enthalten, und die Projektivitäten der Punktreihen eines Büschels projektiver Punktreihen sind füreinander invariant[6]). Daraus schließen wir:

Die Kollineationen der Räume eines Büschels geschart kollinearer Räume sind füreinander invariant.

Enthält ein Büschel projektiver Punktreihen die durch die Projektivität ψ auf seine Grundreihe bezogene Punktreihe, so enthält er auch die durch die Projektivität ψ^{-1} auf die Grundreihe bezogene Punktreihe. Daher gilt:

In einer Büschelschar geschart kollinearer Räume können die Räume so gepaart werden, daß die Elemente jedes Paares durch inverse Kollineationen auf den Grundraum der Schar bezogen sind. Diese inversen kollinearen Räume bilden die Elementenpaare einer hyperbolischen Involution, die den identisch und den geschart involutorischen Raum zu Doppelelementen hat.

[6]) Jolles, a. a. O., Nr. 3.

5. Alle von der Leitschar einer Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ ge-genen projektiven Regelscharen zweiter Ordnung, die von einem und nit von jedem Strahle von $\mathfrak{R}^2$ in zu ihnen perspektiven Punktreihen es Büschels projektiver Punktreihen geschnitten werden, bilden einen ischel projektiver Regelscharen zweiter Ordnung". Vier „harmonische" jektive Regelscharen des Büschels werden dabei von den Strahlen von in vier harmonischen Punktreihen der Büschel projektiver Punktreihen chnitten. Mit Rücksicht hierauf können wir den Büschel projektiver gelscharen zweiter Ordnung in den Projektivitätsbereich der Grund-ilde erster Stufe einreihen; insbesondere kann er zu anderen auf ihn jektiv bezogenen Gebilden des Bereiches perspektiv sein. Ein von der tschar von $\mathfrak{R}^2$ getragener Büschel projektiver Regelscharen enthält ßer der identisch involutorischen Regelschar noch eine zweite zu seiner ndregelschar involutorische Regelschar. Sie heiße die „charakteristische olutorische" Regelschar des Büschels oder seine „charakteristische In-ution". Ihre (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelstrahlen sind gemeinsamen Deckstrahlen aller projektiven Regelscharen des Büschels d heißen seine „Basisstrahlen". Die charakteristische Involution des schels projektiver Regelscharen ist perspektiv zu den charakteristi-en Involutionen aller Büschel projektiver Punktreihen, in denen die ahlen von $\mathfrak{R}^2$ jenen Büschel schneiden. Bekanntlich ist der Büschel jektiver Punktreihen durch je zwei seiner Elemente bestimmt. Ferner den die Projektivitäten seiner Punktreihen eine Gruppe, und je zwei n ihnen sind füreinander invariant. Endlich liegen die von den homo-ger Elementen der Punktreihen gebildeten Punktreihen im Büschel selbst. ch der Definition wird aber der Büschel projektiver Regelscharen von n Strahlen von $\mathfrak{R}^2$ in zu ihm perspektiven Büscheln projektiver Punkt-hen geschnitten. Folglich ergibt sich:

Der Büschel projektiver Regelscharen zweiter Ordnung ist durch je ei seiner Elemente bestimmt. Die Projektivitäten seiner Regelscharen den eine Gruppe und sind füreinander invariant. Die von den ho-logen Strahlen seiner Regelscharen gebildeten projektiven Regelscharen eiter Ordnung liegen im Büschel.

6. Liegt eine Regelschar $\mathfrak{R}^2$ in der Basiskongruenz einer Büschelschar schart kollinearer Räume, so trägt ihre Leitschar ∞^1 homologe Regel-aren zweiter Ordnung aus den Räumen der Büschelschar. Die homo-gen Regelscharen werden von jedem Strahle von $\mathfrak{R}^2$ in homologen Punkt-hen der Büschelschar geschnitten. Diese bilden auf ihnen Büschel pro-ktiver Punktreihen, deren charakteristische Involutionen in der charakte-tischen Involution der Büschelschar liegen (4.). Folglich bilden die von r Leitschar von $\mathfrak{R}^2$ getragenen homologen Regelscharen aus den Räumen

der Büschelschar einen zu dieser perspektiven Büschel projektiver Regelscharen zweiter Ordnung (5.), dessen charakteristische Involution ebenfalls in der charakteristischen Involution der Büschelschar enthalten ist.

Trägt umgekehrt die Leitschar einer Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ einen Büschel projektiver Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{L}^2, \ldots, \mathfrak{L}_i^2, \ldots$, so bestimmen wir zwei geschart kollineare Räume Σ, Σ_i derart, daß ihre Kollineation φ_i jeden Strahl von $\mathfrak{R}^2$ in sich selbst und die Regelschar $\mathfrak{L}^2$ in eine Regelschar $\mathfrak{L}_i^2$ des Büschels überführt (2.). Durch die Räume Σ, Σ_i geht eine Büschelschar geschart kollinearer Räume. Die Deckstrahlenkongruenz aller geschart kollinearen Räume der Büschelschar geht durch $\mathfrak{R}^2$, und die Räume selbst enthalten als homologe Elemente die Regelscharen des $\mathfrak{L}^2, \mathfrak{L}_i^2$ verbindenden Büschels projektiver Regelscharen zweiter Ordnung. Es ergibt sich dieselbe Büschelschar geschart kollinearer Räume, gleichgültig welche Regelschar $\mathfrak{R}_x^2$ aus dem Büschel projektiver Regelscharen zusammen mit $\mathfrak{R}^2$ und $\mathfrak{L}^2$ bei der Bestimmung der Büschelschar benutzt wird. Also:

Die Leitschar jeder Regelschar zweiter Ordnung, die in der Basiskongruenz einer Büschelschar geschart kollinearer Räume enthalten ist, ist der Träger eines zur Büschelschar perspektiven Büschels homologer Regelscharen zweiter Ordnung der Räume; die charakteristische Involution des Büschels liegt in der charakteristischen Involution der Büschelschar. Alle geschart kollinearen Räume, deren Kollineationen jeden Strahl einer Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ in sich selbst und eine Regelschar eines von der Leitschar von $\mathfrak{R}^2$ getragenen Büschels projektiver Regelscharen in je eine der übrigen Regelscharen des Büschels überführen, bilden eine Büschelschar geschart kollinearer Räume. Die Leitgeraden der Basiskongruenz der Büschelschar sind gleichzeitig die Basisstrahlen des Büschels projektiver Regelscharen. Der Büschel projektiver Regelscharen ist zu ∞^3 Büscheln homologer Kegelschnitte der geschart kollinearen Räume perspektiv. Jede gemeinsame Bisekante der Kegelschnitte eines solchen Büschels liegt in der Basiskongruenz der Büschelschar. Trägt die Leitschar einer Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ Regelscharen zweiter Ordnung, die zu den Kegelschnitten eines Kegelschnittbüschels von $\mathfrak{R}^2$ perspektiv sind, so sind diese Regelscharen durch die zu $\mathfrak{R}^2$ perspektiven Kegelschnitte projektiv auf $\mathfrak{R}^2$ und aufeinander bezogen und bilden einen Büschel projektiver Regelscharen zweiter Ordnung.

7. Die Leitschar einer Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2(a, b, c, \ldots)$ trage den Büschel projektiver Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$, $\mathfrak{L}_1^2(p_1, q_1, r_1, \ldots)$, $\mathfrak{L}_2^2(p_2, q_2, r_2, \ldots), \ldots$ Er bestimmt zusammen mit der Regelschar $\mathfrak{R}^2(a, b, c, \ldots)$ eine Büschelschar geschart kollinearer Räume $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ Die Kollineationen, welche die Räume $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$ auf

Raum Σ beziehen, führen jeden Strahl von $\mathfrak{R}^2(a, b, c, \ldots)$ in sich
ost und die Regelschar $\mathfrak{L}^2(p, q, r, ,..)$ bzw. in die Regelscharen
$(p_1, q_1, r_1, \ldots)$, $\mathfrak{L}_2^2(p_2, q_2, r_2, \ldots)$, ... der Räume $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ über (6.).
lt nun ein Strahlentripel p, q, r der Regelschar $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$ von Σ
heinander mit den ihm entsprechenden Strahlentripeln p_1, q_1, r_1;
q_2, r_2; ... der Regelscharen $\mathfrak{L}_1^2(p_1, q_1, r_1, \ldots)$, $\mathfrak{L}_2^2(p_2, q_2, r_2, \ldots)$ aus
Räumen $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ zusammen, und werden dabei die Strahlen $p, p_1, p_2, \ldots$
dem Strahle a von $\mathfrak{R}^2(a, b, c \ldots)$ durch die Ebenen $\alpha^p, \alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots$ pro-
ert, die Strahlen $q, q_1, q_2, \ldots$ aus dem Strahle b der Regelschar durch
Ebenen $\beta^q, \beta_1^q, \beta_2^q, \ldots$, endlich die Strahlen $r, r_1, r_2, \ldots$ aus dem
ahle c der Regelschar durch die Ebenen $\gamma^r, \gamma_1^r, \gamma_2^r, \ldots$, so sind die
enenbüschel $a(\alpha^p, \alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots)$, $b(\beta^q, \beta_1^q, \beta_2^q, \ldots)$, $c(\gamma^q, \gamma_1^q, \gamma_2^q, \ldots)$ als
schel homologer Ebenen der Räume der Büschelschar projektiv. Die
nittpunkte $\alpha^p \beta^q \gamma^r$, $\alpha_1^p \beta_1^q \gamma_1^r$, $\alpha_2^p \beta_2^q \gamma_2^r, \ldots$ einander entsprechender
enentripel der drei projektiven Ebenenbüschel sind bzw. homologe Punkte
Räume $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ und als solche mit einem Strahle s der Basis-
gruenz der Büschelschar geschart kollinearer Räume inzident. Somit
bewiesen

Trägt die Leitschar einer Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2(a, b, c, \ldots)$
en Büschel projektiver Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$,
$(p_1, q_1, r_1, \ldots)$, $\mathfrak{L}_2^2(p_2, q_2, r_2, \ldots)$, ..., *und projiziert man aus drei ge-*
enen Strahlen a, b, c *von* $\mathfrak{R}^2$ *bzw. die drei Reihen homologer Strahlen*
$p, p_1, p_2, \ldots$; $q, q_1, q_2, \ldots$; $r, r_1, r_2, \ldots$ *der projektiven Regelscharen*
rch die Ebenenbüschel $a(\alpha^p, \alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots)$, $b(\beta^q, \beta_1^q, \beta_2^q, \ldots)$ *und*
$\gamma^r, \gamma_1^r, \gamma_2^r, \ldots$), *so bilden die Punkte* $\alpha^p \beta^q \gamma^r$, $\alpha_1^p \beta_1^q \gamma_1^r$, $\alpha_2^p \beta_2^q \gamma_2^r, \ldots$
e Gerade s. *Der Strahl* s *liegt in der Basiskongruenz der Büschelschar ge-*
art kollinearer Räume $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, *die auf den Raum* Σ *kollinear so*
ogen sind, daß ihre Kollineationen die Regelschar $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$ *bzw. in*
zu ihr projektiven Regelscharen $\mathfrak{L}_1^2(p_1, q_1, r_1, \ldots)$, $\mathfrak{L}_2^2(p_2, q_2, r_2, \ldots)$, ...
d die Strahlen der Regelschar $\mathfrak{R}^2(a, b, c, \ldots)$ *in sich selbst überführen.*

Der Büschel projektiver Regelscharen zweiter Ordnung steht zu den
Strahlen der linearen Kongruenz C_1^1 in analoger Beziehung wie der
einem Kegelschnitte getragene Büschel projektiver Punktreihen zu
ner Projektivitätsachse. Die ∞^3 Strahlen von C_1^1 seien daher die
rojektivitätsachsen" des Büschels projektiver Regelscharen zweiter Ord-
ng genannt. Die perspektiven Ebenenbüschel erster Ordnung, die aus
Strahlen der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ die auf einer der ∞^2 Projektivitätsachsen
egenen Punktreihen projizieren, sind bzw. perspektiv zu den zu ihnen
ojektiven Regelscharen des Büschels projektiver Regelscharen zweiter
dnung. Von den Strahlenpaaren der charakteristischen Involution des
schels projektiver Regelscharen zweiter Ordnung werden je zwei seiner

∞^2 Projektivitätsachsen harmonisch getrennt, die für die Fläche seines Trägers reziprok polar sind.

B. Die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz.

8. Von Reye[7]) stammt der Satz:

Enthalten zwei nicht involutorische kollineare Räume Σ, Σ_i zwei windschiefe einander doppelt entsprechende Strahlen g, g_i, so vertauscht die Kollineation φ_i von Σ, Σ_i die Strahlen einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 paarweise miteinander.

Der erste von Reye hierfür erbrachte Beweis ist unvollständig. Später wurde jedoch die Richtigkeit des Satzes mehrfach einwurfsfrei erwiesen[8]).

Sehr einfach ergibt sich der Beweis des Satzes aus folgender Überlegung:

Haben auf der Gerade g_i die projektiven Punktreihen, die bzw. in Σ_i und Σ der Punktreihe auf g entsprechen, reelle Deckpunkte, so entspricht jedem dieser Deckpunkte derselbe ihm in Σ_i wie Σ entsprechende Punkt, also ein ihm in Σ, Σ_i doppelt entsprechender Punkt von g. Die Verbindungsgerade je zweier solchen einander doppelt entsprechenden Punkte ist ein Deckstrahl von Σ, Σ_i, auf dem die homologen Punktreihen der Räume eine Involution bilden. Somit sind diese beiden windschiefen Deckstrahlen von Σ, Σ_i die Leitgeraden einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1, deren Strahlen in den kollinearen Räumen Σ, Σ_i paarweise einander doppelt entsprechen.

In zwei kollinearen Räumen Σ, Σ_i liegen mindestens zwei reelle Deckstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. die sich auch vereinigen können[9]). Haben somit auf g_i die projektiven Punktreihen, die in Σ_i und Σ bzw. der Punktreihe g entsprechen, konjugiert imaginäre Deckpunkte, so sind die vier Strahlen $g, g_i, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ windschief. Die durch die zweite Potenz φ_i^2 der Kollineation φ_i von Σ, Σ_i kollinear aufeinander bezogenen Räume Σ, Σ_{i2} haben demnach außer den zwei mit g, g_i zusammenfallenden Deckstrahlen noch mindestens zwei zu ihnen windschiefe Deckstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, die sich auch vereinigen können. Die Räume Σ, Σ_{i2} sind folglich geschart kollinear (3.), ihre Deckstrahlenkongruenz C_1^1 ist elliptisch, und die Strahlen dieser Kongruenz werden durch die Kollineation φ_i von Σ, Σ_i paarweise miteinander vertauscht.

---

[7]) Über symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften, Math. Ann. **43** (1893), Nr. 29.

[8]) G. Kohn, a. a. O., S. 125. — Reye, Räumliche Kollineationen, die Involutionen enthalten, Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe **19** (1912), S. 293. — Jolles, Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe **22** (1914), S. 280.

[9]) Jolles in Reyes Geometrie der Lage, 3. Abtlg., 4. Aufl., Stuttgart 1910, S. 209.

Zwei Räume Σ, Σ_i, deren Kollineation φ_i außer den Strahlen der ngruenz C_1^1 noch zwei windschiefe Strahlen miteinander vertauscht, sind chart involutorisch.

Eine nicht involutorische Kollineation φ_i zweier Räume Σ, Σ_i, in en zwei windschiefe Strahlen einander doppelt entsprechen, heißt halbchart erster Art[10]), und eine lineare Kongruenz, deren Strahlen in zwei ch eine halbgescharte Kollineation erster Art aufeinander bezogenen umen paarweise einander doppelt entsprechen, heiße „windschief inutorisch".

9. Eine Kollineation φ_i führe den Raum Σ so in den Raum Σ_i über, je zwei einander zugeordnete Strahlen der involutorischen Regelschar iter Ordnung $\mathfrak{R}^2(aa_i, bb_i, \ldots)$ miteinander vertauscht werden und die der Leitschar von $\mathfrak{R}^2$ getragenen Regelscharen zweiter Ordnung $(p, q, r, \ldots)$ und $\mathfrak{L}_i^2(p_i, q_i, r_i, \ldots)$ einander entsprechen. Die Kollition φ_i bedingt eine lineare Strahlenkongruenz, deren Elemente sie paarse miteinander vertauscht (**8.**). Ist dann die Regelschar $\mathfrak{L}_x^2(p_x, q_x, r_x, \ldots)$ Element des die projektiven Regelscharen $\mathfrak{L}^2, \mathfrak{L}_i^2$ verbindenden Büschels jektiver Regelscharen, so vertausche die Kollineation φ_x ebenfalls je ei einander zugeordnete Regelstrahlen von $\mathfrak{R}^2(aa_i, bb_i, \ldots)$, verwandle r die Regelschar $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$ in die Regelschar $\mathfrak{L}_x^2(p_x, q_x, r_x, \ldots)$. ch die Kollineation φ_x bedingt eine lineare Strahlenkongruenz, deren mente sie paarweise miteinander vertauscht. Wir wollen beweisen: die den windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen sind idenh und bleiben es, wenn die Regelschar $\mathfrak{L}_x^2(p_x, q_x, r_x, \ldots)$ nacheinander allen Elementen des $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L}_i^2$ verbindenden Büschels projektiver Regelaren zweiter Ordnung zusammenfällt. Die durch die Kollineationen und φ_x auf Σ bezogenen Räume Σ_i, Σ_x sind durch die Kollineation $^1 \cdot \varphi_x$ aufeinander bezogen. Die Kollineation $\varphi_i^{-1} \cdot \varphi_x$ läßt jeden Strahl $\mathfrak{R}^2$ in Ruhe und ist folglich geschart kollinear (**3.**); sie ist bestimmt ch die zwei Bedingungen, jeden Strahl von $\mathfrak{R}^2$ in sich selbst überühren und die Regelschar $\mathfrak{L}_i^2(p_i, q_i, r_i, \ldots)$ in die zu ihr projektive gelschar $\mathfrak{L}_x^2(p_x, q_x, r_x, \ldots)$. Fällt $\mathfrak{L}_x^2(p_x, q_x, r_x, \ldots)$ nacheinander mit n Elementen des $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L}_i^2$ verbindenden Büschels projektiver Regelscharen iter Ordnung zusammen, so ergeben sich ∞^1 zu Σ geschart kollineare ume Σ_x. Sie bilden mit Σ_i eine Büschelschar geschart kollinearer ume, deren Basiskongruenz C_1^1 durch die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ geht (**6.**). Nur Kollineationen zwischen den Räumen dieser Büschelschar führen die ahlen von $\mathfrak{R}^2$ in sich selbst und je ein Element des $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L}_i^2$ verbinden Büschels projektiver Regelscharen in ein anderes Element des Büschels

[10]) Reye, a. a. O., S. 291.

über. Alle Kollineationen φ_x bedingen also dieselbe Kongruenz C_1^1, deren Strahlen jede paarweise miteinander vertauscht. Wir haben nur noch zu zeigen: jede Kollineation φ_x ruft die nämliche Paarung hervor.

Einem gegebenen Punkt P von Σ entspricht im Raume Σ_i der Punkt P_i. Die mit den Punkten P, P_i bzw. inzidenten Strahlen p, p_i der linearen Kongruenz C_1^1 werden also durch die Kollineation φ_i miteinander vertaucht. C_1^1 ist aber, wie soeben nachgewiesen wurde, die Basiskongruenz der von Σ_i zusammen mit den Räumen Σ_x gebildeten Büschelschar geschart kollinearer Räume. Folglich sind mit dem Strahle p_i von C_1^1 auch die Punkte P_x inzident, die dem Punkte P_i in den Räumen Σ_x entsprechen. Der Raum Σ bildet demnach mit jedem der Räume Σ_x ein und dieselbe windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz wie mit dem Raume Σ_i. In anderen Worten:

Alle Räume Σ_x, welche auf den Raum Σ durch halbgescharte Kollineationen erster Art so bezogen sind, daß je zwei einander zugeordnete Strahlen einer involutorischen Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2(aa_i, bb_i, \ldots)$ miteinander vertauscht und zwei Regelscharen eines von der Leitschar von $\mathfrak{R}^2$ getragenen Büschels projektiver Regelscharen zweiter Ordnung einander zugewiesen werden, bilden mit Σ dieselbe windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz. Einer der Räume Σ_x liegt zu Σ geschart involutorisch. Der Träger C_1^1 der windschief involutorischen Kongruenz ist die Basiskongruenz der Büschelschar geschart kollinearer Räume, deren Kollineationen jeden Strahl der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ in sich selbst überführen und ebenfalls zwei Regelscharen jenes Büschels projektiver Regelscharen zweiter Ordnung einander zuweisen. Die charakteristische Involution des Büschels projektiver Regelscharen liegt (6.) *im geschart involutorischen Raume der linearen Strahlenkongruenz C_1^1. Die (reellen oder konjugiert imaginären) Deckstrahlen des Büschels projektiver Regelscharen und die Leitgeraden von C_1^1 sind identisch.*

Je nachdem der von der Leitschar der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ getragene Büschel projektiver Regelscharen zweiter Ordnung eine hyperbolische oder elliptische charakteristische Involution hat, ist die gemeinsame windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz aller Raumpaare Σ, Σ_x hyperbolisch oder elliptisch. Ist sie hyperbolisch, so vertauschen die Kollineationen φ_x der Raumpaare Σ, Σ_x auf jedem der beiden gemeinsamen Deckstrahlen der projektiven Regelscharen je zwei einander zugeordnete Elemente einer hyperbolischen oder auf jedem von ihnen je zwei einander zugeordnete Elemente einer elliptischen Punktinvolution miteinander. Eine halbgescharte Kollineation erster Art zweier Räume mit hyperbolischer oder elliptischer windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenz heiße selbst bzw. „hyperbolisch" oder „elliptisch". Die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz

ier durch eine hyperbolische halbgescharte Kollineation erster Art auf-
nder bezogenen Räume enthält keine reellen involutorischen linearen
elscharen zweiter Ordnung, wenn die Strahlenpaare der windschief in-
torischen Kongruenz deren eine Leitgerade in Elementenpaaren einer
erbolischen, deren andere in Elementenpaaren einer elliptischen Punkt-
lution schneiden.

10. Eine hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkon-
nz mit den Leitgeraden u, v ist bestimmt durch die beiden Punkt-
lutionen, die von den Strahlenpaaren der Kongruenz auf den Leit-
den u, v ausgeschnitten werden. Sie enthält vier Doppelstrahlen, die
weise konjugiert imaginär sein können. Jeder von ihnen verbindet
n Doppelpunkt der Punktinvolution auf der einen Leitgerade mit einem
pelpunkt der Punktinvolution auf der andern. Nun sind die in einer
erbolischen linearen Strahlenkongruenz einscharig enthaltenen Regel-
ien zweiten Grades als Inzidenzflächen reeller polaren Räume selbst
[11]). Die durch die Korrelation eines solchen polaren Raumes hervor-
fene Involution unter den Kongruenzstrahlen hat die ∞^1 Strahlen der in
Kongruenz enthaltenen Regelschar seiner Inzidenzfläche zu reellen Dop-
trahlen. Folglich kann eine hyperbolische windschief involutorische
are Strahlenkongruenz nicht aus reziproken Polaren für eine einscharig
er Kongruenz enthaltene Fläche zweiten Grades bestehen.

Zwei Räume, die durch eine elliptische halbgescharte Kollineation
r Art aufeinander bezogen sind, enthalten zwei[9]) reelle Deckstrahlen.
e sind windschief, können aber auch zusammenfallen. Eine elliptische
lschief involutorische lineare Strahlenkongruenz hat also zwei reelle
pelstrahlen. Die in einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz ein-
rig enthaltenen Regelflächen zweiten Grades mit reellen polaren Räumen
aber entweder reell oder imaginär[11]). Werden demnach die Strahlen
Kongruenz durch die Korrelation des polaren Raumes einer solchen
he involutorisch einander zugeordnet, so sind entweder ∞^1 oder keine
en Doppelstrahlen vorhanden. Also auch eine elliptische lineare Strahlen-
gruenz kann durch die Korrelation des polaren Raumes einer solchen
he nicht windschief involutorisch gepaart werden.

Nur dann, wenn je zwei Elementenpaare einer involutorischen linearen
hlenkongruenz in einer Regelschar zweiter Ordnung liegen, sind die
gruenzstrahlen paarweise in dem polaren Raume einer einscharig in
Kongruenz enthaltenen Regelfläche zweiten Grades einander zugeordnet[12]).
schließen wir:

[11]) Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkon-
nz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **134** (1908), Nr. 2.
[12]) Jolles, a. a. O., Nr. 8.

Zwei Paare einander zugeordneter Strahlen einer windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz lassen sich nicht immer durch eine Regelschar zweiter Ordnung verbinden.

In **9** sind wir auf eine windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz gestoßen, die keine involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung enthält. Alle anderen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen enthalten deren ∞^1, wie wir in **14** sehen werden.

11. *Eine windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ ist durch zwei ihrer Strahlenpaare $a, a_i; s, s_i$ bestimmt, die nicht in einer Regelschar zweiter Ordnung liegen.*

Je zwei einander entsprechende Strahlen $u^a, u_i^a; v^a, v_i^a; \ldots$ der durch die drei Paare homologer Strahlen $a, a_i; a_i, a; s, s_i$ bestimmten projektiven Regelscharen zweiter Ordnung aa_is und a_ias_i bilden nämlich Strahlenpaare von $C_1^1(aa_i, ss_i)$, ebenso je zwei einander entsprechende Strahlen $x^s, x_i^s; y^s, y_i^s; \ldots$ der durch die drei Paare homologer Strahlen $s, s_i; s_i, s; a, a_i$ bestimmten projektiven Regelscharen zweiter Ordnung ss_ia und s_isa_i. Ist ferner t ein nicht in den Regelscharen aa_is und ss_ia enthaltener Strahl des Trägers C_1^1 der windschief involutorischen Kongruenz, so verbinden wir t mit den gegebenen Strahlen u^a von aa_is und x^s von ss_ia durch die Regelschar zweiter Ordnung tu^ax^s. Sie liegt, da sie drei Strahlen von C_1^1 enthält, ganz in dieser Kongruenz und geht folglich durch einen zweiten Strahl v^a von aa_is. Die ihr in $C_1^1(aa_i, ss_i)$ zugeordnete Regelschar $t_iu_i^ax_i^s$ geht durch die zwei Strahlen u_i^a und v_i^a von a_ias. In den einander zugeordneten Regelscharen tu^ax^s und $t_iu_i^ax_i^s$ besteht aber zwischen den homologen Strahlenwürfen $u^ax^sv^at$ und $u_i^ax_i^sv_i^at_i$ die Beziehung

$$u^ax^sv^at \overline{\wedge} u_i^ax_i^sv_i^at_i.$$

In ihr sind t und die einander entsprechenden Elemente $u^a, u_i^a; x^s, x_i^s; v^a, v_i^a$ bekannt. Folglich bestimmt sie den gesuchten t zugeordneten Strahl t_i der Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$[13]).

Eine lineare Strahlenkongruenz läßt sich auf ∞^4 Weisen windschief involutorisch paaren.

12. Zwei nicht in einer Regelschar zweiter Ordnung enthaltene Strahlenpaare $a, a_i; s, s_i$ bestimmen als Paare reziproker Polaren ∞^1 polare Räume. Die ∞^1 polaren Räume haben ∞^2 gemeinsame reziproke Polaren[14]). Dies sind, wie aus dem Vergleiche der soeben zitierten Ergänzung eines Reye-

---

[13]) Durch eine ähnliche Überlegung ergänze ich in der Arbeit: Einfache Kennzeichen polarer Korrelationen, Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 93, Nr. 6, den dort mitgeteilten Beweis eines Satzes von Reye.

[14]) Reye, Die Geometrie der Lage, 2. Abt., 3. Aufl., Leipzig 1892, Nr. 57. S. 274.

n Satzes mit den Betrachtungen in 11 hervorgeht, die ∞^2 Strahlen-
re der windschief involutorischen Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$. Die ∞^1
ren Räume bilden einen Büschel polarer Räume und ihre Inzidenz-
hen einen F^2-Büschel. Da die einander zugeordneten Strahlen der
dschief involutorischen Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ reziprok polar für die
chen des F^2-Büschels sind, so sind die polaren Räume der Flächen
hart invariant für die Kongruenz C_1^1 und zwar sekundäre polare Räume
Kongruenz[15]). Die Basiskurve des F^2-Büschels ist ein einfaches Raum-
seit, dessen Seiten paarweise konjugiert imaginär sein können[16]). Kurz:

Je zwei einander zugeordnete Strahlen einer windschief involutorischen
aren Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ sind reziprok polar für die Flächen
es F^2-Büschels, also invariant für ∞^1 polare Korrelationen. Die Basis-
ve des F^2-Büschels ist ein einfaches Raumvierseit, dessen Seiten die
ppelstrahlen und dessen Diagonalen die Leitgeraden der windschief
olutorischen Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ sind. Seiten und Diagonalen des
umvierseits können konjugiert imaginär sein. Die polaren Räume der
chen des F^2-Büschels sind sekundäre polare Räume der Kongruenz C_1^1.

Zwei korrelative Räume Σ, Σ_i bilden nach Reye[13]) einen polaren
um, wenn ihre Korrelation die Strahlen a, a_i wie auch die Strahlen s, s_i
einander vertauscht und die vier Strahlen nicht in einer Regelschar
iter Ordnung liegen.

Eine Korrelation, die eine windschief involutorische lineare Strahlen-
gruenz in sich selbst überführt und dabei je zwei einander zugeordnete
ahlen miteinander vertauscht, ist folglich polar.

13. Nach 12 sind je zwei einander zugeordnete Strahlen einer wind-
ief involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ reziprok polar
die Flächen eines F^2-Büschels. Ist das die Basiskurve des F^2-Büschels
lende einfache Raumvierseit reell, besteht also der F^2-Büschel aus
llen Strahlenflächen zweiter Ordnung, so bilden die ∞^2 gemeinsamen
iproken Polaren seiner Flächen eine hyperbolische windschief involuto-
he Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$. Die vier reellen Doppelstrahlen von
(aa_i, ss_i) sind die Seiten des einfachen Vierseits, seine Diagonalen die
llen Leitgeraden u, v der Kongruenz C_1^1. Eine solche windschief in-
utorische Paarung ruft in einer hyperbolischen Strahlenkongruenz C_1^1 die
rrelation eines sekundären polaren Raumes mit geradliniger Inzidenzfläche
vor, sobald deren zwei Regelscharen je ein Paar reeller Kongruenzstrahlen
halten. Beide Regelscharen der Inzidenzfläche sind also durch C_1^1 hyper-
isch involutorisch gepaart.

[15]) Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz, rn. f. d. reine u. angew. Math. 184 (1908), Nr. 12.

[16]) Jolles, a. a. O., Nr. 13 und Nr. 14.

Sind die Gegenseiten des die Basiskurve des F^2-Büschels bildende einfachen Raumvierseits konjugiert imaginäre Strahlen zweiter Art, und sind folglich die Flächen des F^2-Büschels teils reelle Strahlenflächen, teils imaginär, so bilden wiederum die ∞^2 gemeinsamen reziproken Polaren seiner Flächen eine hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$, deren Leitgeraden u, v die reellen Diagonalen des Raumvierseits sind. Die vier Doppelstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ sind nunmehr als Gegenseiten des Raumvierseits zwei Paare konjugiert imaginärer Geraden zweiter Art. Diese windschief involutorische Paarung einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 bewirkt die Korrelation eines sekundären polaren Raumes von C_1^1, dessen Inzidenzfläche eine Regelfläche ist, in deren Strahlenscharen keine reellen Kongruenzstrahlen liegen. Beide Strahlenscharen der Inzidenzfläche sind also durch C_1^1 elliptisch involutorisch gepaart.

Endlich ist die windschief involutorische lineare Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i$ der den Flächen des F^2-Büschels gemeinsamen reziproken Polaren noch hyperbolisch, wenn seine Flächen reell und strahlenlos sind. Die vier Doppelstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ sind in diesem Falle als Seiten des Basisvierseits des F^2-Büschels zwei Paare konjugiert imaginärer Geraden erster Art, die beiden Leitgeraden der Kongruenz als Diagonalen zwei reelle Geraden u, v. Durch eine von ihnen — etwa u — gehen die reellen Ebenen, auf v liegen dann die reellen Punkte der beiden Paare konjugiert imaginärer Geraden. In einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ruft die Korrelation jedes sekundären polaren Raumes mit reeller strahlenloser Inzidenzfläche eine solche windschief involutorische Paarung der Strahlen hervor.

Elliptisch ist die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ der den Flächen des F^2-Büschels gemeinsamen reziproken Polaren nur dann, wenn das eine Paar Gegenseiten seines Basisvierseits aus zwei reellen Strahlen, das andere Paar aus zwei konjugiert imaginären Strahlen zweiter Art besteht. Die elliptische windschief involutorische Strahlenkongruenz hat die nunmehr konjugiert imaginären Diagonalen u, v des Basisvierseits zu Leitgeraden und seine zwei reellen und zwei konjugiert imaginären Gegenseiten zu Doppelstrahlen. Die Korrelation jedes sekundären polaren Raumes einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz bestimmt eine derartige Paarung der Kongruenzstrahlen. Die Inzidenzflächen der sekundären polaren Räume sind in diesem Falle reelle Regelflächen zweiten Grades[17]), deren eine Strahlenschar durch C_1^1 hyperbolisch involutorisch und deren andere durch diese Kongruenz elliptisch involutorisch gepaart

[17]) Jolles, a. a. O., Nr. 17.

rd. In der einen Regelschar liegen also zwei reelle, in der andern ei konjugiert imaginäre Strahlen von C_1^1; sie sind bzw. die reellen und konjugiert imaginären Doppelstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$.

Die windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen zerfallen rnach in vier Arten; drei von ihnen sind hyperbolisch und eine ist iptisch.

a) Die hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz rster Art" hat vier reelle Doppelstrahlen; sie ist bestimmt durch zwei Paare ndschiefer Strahlen einer hyperbolischen linearen Kongruenz, die deren ide Leitgeraden in zwei Punktepaaren zweier hyperbolischen Punktinvolunen schneiden. Aus jedem der beiden Doppelpunkte einer der zwei hyperlischen Punktinvolutionen wird die andere durch einen in dieser windnief involutorischen Kongruenz enthaltenen hyperbolisch involutorischen rahlenbüschel projiziert.

b) Die hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz weiter Art" hat zu Doppelstrahlen zwei Paare konjugiert imaginärer raden zweiter Art; sie ist bestimmt durch zwei Paare Strahlen einer perbolischen linearen Kongruenz, die deren beide Leitgeraden in zwei nktepaaren zweier elliptischen Punktinvolutionen schneiden.

c) Die hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz ritter Art" hat zu Doppelstrahlen zwei Paare konjugiert imaginärer raden erster Art; sie ist bestimmt durch zwei Paare Strahlen einer perbolischen linearen Kongruenz, die deren eine Leitgerade in zwei nktepaaren einer hyperbolischen, deren andere Leitgerade in zwei nktepaaren einer elliptischen Punktinvolution schneiden. Jeder der iden Doppelpunkte der hyperbolischen Punktinvolution ist der Mittelnkt eines in dieser windschief involutorischen Kongruenz enthaltenen ellen zur elliptischen Punktinvolution perspektiven elliptisch involutorihen Strahlenbüschels erster Ordnung.

d) Die elliptische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz t zwei reelle und zwei konjugiert imaginäre windschiefe Doppelstrahlen; ist bestimmt durch zwei Strahlenpaare einer elliptischen linearen ngruenz.

14. Die Paarung in jeder elliptischen windschief involutorischen linearen rahlenkongruenz ebenso wie die in jeder hyperbolischen windschief involorischen linearen Strahlenkongruenz erster oder zweiter Art $C_1^1(aa_i, ss_i)$ nn durch die Korrelation eines sekundären polaren Raumes von C_1^1 bewirkt rden, dessen Inzidenzfläche S^2 eine reelle Regelfläche zweiten Grades ist d das von den Doppelstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ gebildete Raumvierseit entlt (**13.**). Die Strahlenscharen $\mathfrak{R}^2$ und $\mathfrak{L}^2$ der Fläche S^2 sind dann durch Kongruenz C_1^1 involutorisch gepaart. Je zwei Strahlen, die in einer der

beiden Involutionen einander zugeordnet sind, sind Achsen zweier durch C_1^1 einander zugeordneten Ebenenbüschel, die bzw. eine für S^2 polarinvariante Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}_r^2$ oder $\mathfrak{L}_l^2$ erzeugen. Sowohl $\mathfrak{R}^2$ wie $\mathfrak{L}^2$ bedingen ∞^1 Regelscharen. Sie liegen bzw. auf den für S^2 polarinvarianten Flächen der F^2-Büschel $F^2(\mathfrak{R}_r^2)$ und $F^2(\mathfrak{L}_l^2)$. Die Basiskurve des F^2-Büschels $F^2(\mathfrak{R}_r^2)$ ist ein Raumvierseit, dessen eines Paar Gegenseiten die beiden (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden von C_1^1 und dessen zweites Paar Gegenseiten die beiden in der Regelschar $\mathfrak{L}^2$ der Fläche S^2 enthaltenen (reellen oder konjugiert imaginären) Strahlen von C_1^1 — also zwei windschiefe Doppelstrahlen von $C_1^1(a\,a_i,\ s\,s_i)$ — sind. Ebenso besteht die Basiskurve des F^2-Büschels $F^2(\mathfrak{L}_l^2)$ aus den beiden (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden von C_1^1 und den beiden in der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ von S^2 enthaltenen (reellen oder konjugiert imaginären) windschiefen Doppelstrahlen der windschief involutorischen Kongruenz. Jede Fläche des einen F^2-Büschels ist für jede Fläche des andern polarinvariant[18]). Also:

In jeder elliptischen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz und in jeder hyperbolischen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz erster oder zweiter Art $C_1^1(a\,a_i,\ s\,s_i)$ sind zwei reelle Scharen von ∞^1 involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung enthalten. Die Regelscharen jeder Schar liegen auf den Flächen je eines F^2-Büschels. Jede Fläche des einen Büschels ist für alle Flächen des andern polarinvariant. Die Basiskurven beider Büschel sind zwei Raumvierseite, die ein Paar Gegenseiten — die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden der betreffenden windschief involutorischen Kongruenz — gemein haben, und deren andere Gegenseitenpaare aus je zwei (reellen oder konjugiert imaginären) windschiefen Doppelstrahlen der windschief involutorischen Kongruenz bestehen. Ist eine windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(a\,a_i,\ s\,s_i)$ hyperbolisch erster Art oder elliptisch, so werden je zwei einander zugeordnete Strahlen mit zwei reellen windschiefen Doppelstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ durch eine hyperbolisch involutorische Regelschar zweiter Ordnung verbunden, deren Doppelstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sind.

Eine windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz heiße „orthogonal", wenn die in ihr enthaltenen involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung orthogonal sind. Auf den Eigenschaften der orthogonalen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz fußt die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen[19]).

---

[18]) Jolles, a. a. O., Nr. 19.

[19]) Jolles, Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen, Math. Ann. 63 (1907).

Die in einer elliptischen windschief involutorischen linearen Strahlen-
gruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ enthaltenen involutorischen Regelscharen zweiter
nung, welche auf den Flächen des einen F^2-Büschels liegen, sind
erbolisch, die auf den Flächen des andern gelegenen elliptisch. Die
lineation φ_i zweier Räume ist also bestimmt[3]) und elliptisch halbge-
art kollinear, wenn sie die einander zugeordneten Strahlen einer hyper-
sch oder elliptisch involutorischen Regelschar zweiter Ordnung
$(aa_i, bb_i, \ldots)$ miteinander vertauscht und zwei von der Leitschar von
getragene projektive Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$
$\mathfrak{L}_i^2(p_i, q_i, r_i, \ldots)$ mit konjugiert imaginären Deckstrahlen einander
eist. Analog ist die hyperbolische halbgescharte Kollineation erster
φ_i zweier Räume mit einer hyperbolischen windschief involutorischen
aren Strahlenkongruenz erster oder zweiter Art definiert, sobald sie
einander zugeordneten Strahlen bzw. einer hyperbolisch oder elliptisch
olutorischen Regelschar $\mathfrak{R}^2(aa_i, bb_i, \ldots)$ miteinander vertauscht und
i von der Leitschar von $\mathfrak{R}^2$ getragene projektive Regelscharen zweiter
nung $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$ und $\mathfrak{L}_i^2(p_i, q_i, r_i, \ldots)$ mit reellen Deckstrahlen
nder zuweist.

15. Von vier windschiefen Strahlen a, a_i, s, s_i, die nicht in einer
elschar zweiter Ordnung liegen, mögen a, a_i wie s, s_i in zwei durch
halbgescharte Kollineation erster Art φ_i aufeinander bezogenen Räumen
Σ_i einander doppelt entsprechen. Durch die zwei Strahlenpaare a, a_i;
$_i$ ist die windschief involutorische Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ be-
nmt (**11.**).

Ist die halbgescharte Kollineation erster Art φ_i und folglich auch
windschief involutorische lineare Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ hyperbolisch,
schneiden die Strahlenpaare von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ die Leitgeraden u, v der
ngruenz in den Punktepaaren je einer Involution (**8.**). Jede der beiden
olutionen ist bzw. festgelegt durch die zwei Punktepaare A_u, A_{ui};
S_{ui} und A_v, A_{vi}; S_v, S_{vi}, in denen u, v die Strahlenpaare a, a_i und
$_i$ schneiden. Mit Hilfe eines Paares homologer Punkte P, P_i von Σ, Σ_i
etwa auf den Geraden a, a_i — kann die Kollineation φ_i der Räume
gestellt werden durch:

$$A_u A_{ui} S_v S_{vi} P \barwedge A_{ui} A_u S_{vi} S_v P_i \text{ [20]}).$$

Fällt P_i nacheinander mit allen Punkten P_x der Gerade a_i zusammen,
ergeben sich ∞^1 Räume Σ_x, die mit Σ dieselbe hyperbolische wind-
ief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ bestimmen.

---

[20]) Reye, Über symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften,
h. Ann. **43** (1893), Nr. 31.

Sie bilden eine Büschelschar geschart kollinearer Räume mit der hyper bolischen Basiskongruenz C_1^1.

Ist die halbgescharte Kollineation erster Art φ_i und folglich die wind schief involutorische Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ elliptisch, so gehen durc die einander zugeordneten Strahlen a, a_i zwei involutorische Regelschare zweiter Ordnung (**14.**) von $C_1^1(aa_i, ss_i)$. Eine von ihnen greifen wi heraus! Die Leitschar dieser involutorischen Regelschar $\mathfrak{R}^2(aa_i, bb_i, \ldots$ trägt zwei durch φ_i einander zugewiesene Regelscharen zweiter Ordnun $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$ und $\mathfrak{L}_i^2(p_i, q_i, r_i, \ldots)$. Sie und die durch φ_i involutorisc gepaarte Regelschar $\mathfrak{R}^2(aa_i, bb_i)$ bestimmen die durch φ_i aufeinand bezogenen Räume Σ, Σ_i[3]). Im geschart involutorischen Raume der Kor gruenz C_1^1 liegt nun die charakteristische Involution des die projektive Regelscharen $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$ und $\mathfrak{L}_i^2(p_i, q_i, r_i, \ldots)$ verbindenden Büsche projektiver Regelscharen zweiter Ordnung (**9.**). Gleichzeitig mit C_1^1 is also diese charakteristische Involution gegeben. Jede zu $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots$ projektive Regelschar $\mathfrak{L}_x^2(p_x, q_x, r_x, \ldots)$ des Büschels ist folglich bestimmt durch seine uns bekannte charakteristische Involution und durch de einem Strahle p von $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$ entsprechenden Strahl p_x vo $\mathfrak{L}_x^2(p_x, q_x, r_x, \ldots)$. Der Strahl p_x ist aber als Leitstrahl von $\mathfrak{R}^2$ be kannt, sowie man seinen Schnittpunkt P_x mit dem Strahle a_i von $\mathfrak{R}^2$ kennt. Sobald P_x mit dem Punkte P_i zusammenfällt, läßt sich hiernach die elliptische halbgescharte Kollineation erster Art φ_i definieren durch di windschief involutorische Kongruenz $C^1(aa_i, ss_i)$ und die durch φ_i ein ander zugewiesenen Punkte P, P_i. Mit Rücksicht auf das vorher ge wonnene analoge Ergebnis für zwei durch eine hyperbolische halbgescharte Kollineation erster Art aufeinander bezogene Räume ergibt sich somit

Zwei durch eine halbgescharte Kollineation erster Art φ_i aufeinande bezogene Räume Σ, Σ_i sind bestimmt durch ihre windschief involutorisch lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ und zwei ihrer homologen Punkt P, P_i oder Ebenen π, π_i.

Die windschief involutorische Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ ist durch zwe nicht in einer Regelschar zweiter Ordnung gelegene Strahlenpaare a, a_i s, s_i bestimmt, und die Punkte P, P_i sind bzw. mit a, a_i inzident. Somi folgern wir aus dem vorstehenden Satze:

Zwei durch eine halbgescharte Kollineation erster Art φ_i aufeinande bezogene Räume Σ, Σ_i sind bestimmt durch vier nicht in einer Regelschar zweiter Ordnung gelegene Strahlen a, a_i, s, s_i, von denen sowohl a, a wie s, s_i in Σ, Σ_i einander doppelt entsprechen, und durch zwei homolog bzw. mit a, a_i inzidente Punkte P, P_i oder Ebenen π, π_i.

Es sei φ_x eine halbgescharte Kollineation erster Art, die je zwei einer zugeordnete Strahlen der involutorischen Regelschar $\mathfrak{R}^2(aa_i, bb_i, \ldots)$ einander vertauscht und der Regelschar $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$ eine der zu projektiven Regelscharen des die Regelscharen $\mathfrak{L}^2(p, q, r, \ldots)$, $p_i, q_i, r_i, \ldots$) verbindenden Büschels projektiver Regelscharen zweiter nung zuweist. Jeder durch eine solche Kollineation φ_x auf Σ bene Raum Σ_x bedingt mit Σ die windschief involutorische Kongruenz $aa_i, ss_i)$ (9.). Insbesondere gibt es ∞^1 Räume Σ_x, die mit Σ die e elliptische windschief involutorische Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ bemen. Sie bilden eine Büschelschar geschart kollinearer Räume mit Basiskongruenz C_1^1. Gleiches war oben für eine hyperbolische windef involutorische Strahlenkongruenz bewiesen. Demnach schließen wir:

Alle auf den Raum Σ durch je eine halbgescharte Kollineation φ_x genen Räume Σ_x, die mit ihm dieselbe windschief involutorische are Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ bestimmen, bilden eine Büschelr geschart kollinearer Räume mit der Basiskongruenz C_1^1.

16. S^2 sei eine Regelfläche zweiten Grades, deren beide Regelscharen und $\mathfrak{L}^2$ involutorisch gepaart sind; sie bestimmt einen die involutorischen elscharen enthaltenden geschart involutorischen Raum[21]). Seine Doppelhlen sind paarweise für S^2 reziprok polar[22]), und bilden (12.) die mentenpaare einer windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz aa_i, ss_i). Je zwei einander zugeordnete Ebenenbüschel erster nung des geschart involutorischen Raumes, deren Achsen Strahlenre der involutorischen Regelschar $\mathfrak{R}^2$ sind, erzeugen nun eine in C_1^1 gene Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}_r^2$. Die Regelscharen $\mathfrak{R}_r^2$ liegen (14.) den Flächen eines F^2-Büschels $F^2[\mathfrak{R}_r^2]$. Folglich liegen die nicht in enthaltenen Regelscharen dieser Flächen in einer linearen Kongruenz [23]). Die Kongruenz R_1^1 geht durch die Regelschar $\mathfrak{R}^2$. Sie ist, da Flächen des F^2-Büschels $F^2[\mathfrak{R}_r^2]$ die Doppelstrahlen der involutorischen elschar $\mathfrak{L}^2$ enthalten, zugleich mit dieser hyperbolisch oder elliptisch. sie hyperbolisch, so sind ihre Leitgeraden die beiden in $\mathfrak{L}^2$ gelegenen len Strahlen von C_1^1. Ist sie elliptisch — werden also durch R_1^1 die geraden von $\mathfrak{R}^2$ in einer elliptischen Involution $\mathfrak{L}'^2$ einander zugeiet —, so bedenke man, daß R_1^1 für C_1^1 geschart invariant ist, d. h. Projektivität der elliptisch involutorischen Regelschar $\mathfrak{L}^2$ die elliptisch lutorische Regelschar $\mathfrak{L}'^2$ in sich selbst überführt. Das ist aber nur

---

[21]) v. Staudt, a. a. O., Nr. 102.

[22]) v. Staudt, a. a. O., Nr. 103.

[23]) Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkonnz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 134 (1908), Nr. 12.

möglich, wenn beide kollokalen elliptisch involutorischen Regelscharen identisch sind; also die beiden in $\mathfrak{L}^2$ gelegenen konjugiert imaginären Strahlen von C_1^1 mit den Leitgeraden von R_1^1 zusammenfallen. Der geschart involutorische Raum von R_1^1 enthält, gleichgültig ob R_1^1 hyperbolisch oder elliptisch ist, die in R_1^1 gelegene Regelschar $\mathfrak{R}^2$ und die gegebene involutorische Regelschar $\mathfrak{L}^2$ und ist durch diese beiden Regelscharen bestimmt[24]).

Ebenso wie die involutorische Regelschar $\mathfrak{R}^2$ der gegebenen Fläche S^2 zu den in der Kongruenz C_1^1 enthaltenen auf den Flächen des F^2-Büschels $F^2[\mathfrak{R}_r^2]$ gelegenen Regelscharen $\mathfrak{R}_r^2$ führt, führt die involutorische Regelschar $\mathfrak{L}^2$ von S^2 zu den in C_1^1 enthaltenen auf den Flächen des F^2-Büschels $F^2[\mathfrak{L}_l^2]$ gelegenen Regelscharen $\mathfrak{L}_l^2$. Wiederum liegen die nicht in C_1^1 enthaltenen Regelscharen der Flächen des Büschels $F^2[\mathfrak{L}_l^2]$ in einer linearen Kongruenz L_1^1. Die Leitgeraden von L_1^1 sind die (reellen oder konjugiert imaginären) in $\mathfrak{R}^2$ gelegenen Strahlen von C_1^1. Der geschart involutorische Raum von L_1^1 enthält die aus Strahlen von L_1^1 bestehende Regelschar $\mathfrak{L}^2$ und die gegebene involutorische Regelschar $\mathfrak{R}^2$ und ist durch diese beiden Regelscharen bestimmt. In R_1^1 wie L_1^1 ist die Regelfläche zweiten Grades S^2 einscharig enthalten; beide linearen Kongruenzen sind also für S^2 polarinvariant. Endlich sind auch die ∞^1 involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{R}_r^2$ und $\mathfrak{L}_r^2$ von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ polarinvariant für S^2, und somit enthalten nur die Flächen des F^2-Büschel $F^2(\mathfrak{R}_r^2)$ und $F^2(\mathfrak{L}_l^2)$ involutorische Regelscharen zweiter Ordnung von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ (**14.**). Kurz, es ist gezeigt:

Sind die einander zugeordneten Strahlen einer windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ reziprok polar für eine Regelfläche zweiten Grades S^2, deren Strahlenscharen $\mathfrak{R}^2$ und $\mathfrak{L}^2$ die Kongruenz C_1^1 involutorisch paart, und tragen die beiden F^2-Büschel $F^2(\mathfrak{R}_r^2)$ und $F^2(\mathfrak{L}_l^2)$ bzw. die in $C_1^1(aa_i, ss_i)$ enthaltenen beiden Scharen involutorischer Regelscharen $\mathfrak{R}_r^2$ und $\mathfrak{L}_l^2$, so bilden die nicht in C_1^1 enthaltenen Regelscharen der Flächen $F^2(\mathfrak{R}_r^2)$ und $F^2(\mathfrak{L}_l)$ bzw. die für S^2 polarinvarianten linearen Kongruenzen R_1^1 und L_1^1. Der geschart involutorische Raum von R_1^1 hat die Strahlen von $\mathfrak{R}^2$ zu Doppelstrahlen, der von L_1^1 die Strahlen von $\mathfrak{L}^2$. Jener enthält die involutorische Regelschar $\mathfrak{L}^2$, dieser die involutorische Regelschar $\mathfrak{R}^2$. Beide Kongruenzen sind für die einscharig in ihnen enthaltene Fläche S^2 polarinvariant. Die Leitgeraden von R_1^1 fallen mit den (reellen oder konjugiert imaginären) in $\mathfrak{L}^2$ gelegenen Strahlen von C_1^1 zusammen, die von L_1^1 mit den (reellen oder konjugiert imaginären) in $\mathfrak{R}^2$ gelegenen Strahlen von C_1^1. Das eine

[24]) Staudt, a. a. O., Nr. 104.

ir windschiefer Doppelstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ bildet die Leitgeraden R_1^1, das andere die von L_1^1.

Der geschart involutorische Raum der Kongruenz R_1^1 und diese selbst bestimmt durch die in ihm enthaltene involutorische Regelschar $\mathfrak{L}^2$ die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ der Kongruenz, von denen jede die Leitschar der ern ist. Es sei nun die involutorische Regelschar $\mathfrak{L}^2$ elliptisch und e nacheinander mit allen elliptisch involutorischen Regelscharen zweiter nung des geschart involutorischen Raumes von C_1^1 zusammen, die zwei jugiert imaginäre Strahlen von C_1^1 zu Doppelstrahlen haben. Dann be- mmt jede dieser elliptisch involutorischen Regelscharen einen sie ent- enden geschart involutorischen Raum, dessen lineare Strahlenkongruenz ch ihre Leitschar $\mathfrak{R}^2$ geht, und wir erhalten alle linearen Kongruenzen R_1^1, en Leitgeraden je zwei konjugiert imaginäre windschiefe Strahlen von C_1^1 l. Sie sind die reellen Repräsentanten aller konjugiert imaginären dschiefen Strahlen der Kongruenz.

17. Jedes Paar reeller oder konjugiert imaginärer windschiefen ahlen einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 bildet die Doppelstrahlen ∞^1 im geschart involutorischen Raume Σ_g von C_1^1 enthaltenen invo- orischen Regelscharen zweiter Ordnung, deren Leitscharen in Σ_g eben- s involutorisch gepaart sind und zu gemeinsamen Doppelstrahlen zwei lle oder konjugiert imaginäre Kongruenzstrahlen haben[25]). Jedes Paar ller oder konjugiert imaginärer windschiefen Strahlen von C_1^1 bedingt it ein zweites Paar reeller oder konjugiert imaginärer windschiefen ngruenzstrahlen. Je zwei dieser „einander bedingenden Strahlenpaare" den die zwei Paare Gegenkanten eines einfachen Raumvierseits der ngruenz. Seine beiden Diagonalen sind die (reellen oder konjugiert aginären) Leitgeraden von C_1^1. Die ∞^5 Regelscharen zweiter Ordnung, en Strahlenscharen in Σ_g involutorisch gepaart sind, führen somit zu einander bedingenden Strahlenpaaren. Je zwei der einander bedingen- Strahlenpaare bilden das Quadrupel der Doppelstrahlen in einer wind- ief involutorischen linearen Strahlenkongruenz mit dem Träger C_1^1. In er hyperbolischen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz ter Art sind in diesem Quadrupel beide einander bedingenden Strahlen- re reell. In einer hyperbolischen windschief involutorischen linearen ahlenkongruenz zweiter Art bestehen beide einander bedingenden Strahlen- re aus konjugiert imaginären windschiefen Strahlen. In einer elliptischen dschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz wird das eine Strahlen- r aus reellen, das andere aus konjugiert imaginären windschiefen Ge- en gebildet (**13.**).

---

[25]) Jolles, a. a. O., Nr. 12—15.

Die konjugiert imaginären windschiefen Strahlen einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 lassen sich durch hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenzen zweiter Art mit dem Träger H_1^1 definieren, die einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 durch elliptische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenzen mit dem Träger E_1^1.

18. Die Strahlenpaare einer hyperbolischen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ schneiden die beiden Leitgeraden u, v der Kongruenz in den Punktepaaren je einer Involution (8.).

Zwei kollokale hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenzen erster Art (**13.**) haben also zwei Paare einander bedingender Strahlen gemein. Je nachdem die Doppelpunktpaare der beiden auf u, v gelegenen hyperbolischen Involutionen einander trennen oder einschließen, sind die zwei Paare bedingender Strahlen zwei Paare reeller Strahlen oder zwei Paare konjugiert imaginärer Strahlen zweiter Art. Trennen einander die Doppelpunktpaare auf der einen Leitgerade und schließen sie einander ein auf der andern, so haben die beiden kollokalen hyperbolischen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen erster Art zwei Paare konjugiert imaginärer Strahlen erster Art gemein, die dasselbe Paar konjugiert imaginärer Punkte projizieren.

Zwei kollokale hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenzen zweiter Art haben stets zwei reelle sich bedingende Strahlenpaare gemein, ebenso eine hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz zweiter Art und eine mit ihr kollokale erster oder dritter Art.

Zwei kollokale hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenzen dritter Art oder endlich eine hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz dritter Art und eine mit ihr kollokale erster Art haben entweder zwei reelle sich bedingende Strahlenpaare gemein oder zwei Paare konjugiert imaginärer Strahlen erster Art, die dasselbe Paar konjugiert imaginärer Punkte projizieren.

Bei einer elliptischen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ liegen je zwei einander zugeordnete Strahlen mit den beiden reellen Doppelstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in einer hyperbolisch involutorischen Regelschar zweiter Ordnung mit den Doppelstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ (**14.**). Sonach schließen wir:

Je zwei Strahlenpaare einer elliptischen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ sind durch ein drittes Strahlenpaar von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ harmonisch getrennt.

Woraus beiläufig bemerkt ohne weiteres folgt:

Zwei Strahlenpaare, die mit keiner reellen Gerade inzident sein en, bestimmen ein drittes Strahlenpaar, das jedes von ihnen har- sch trennt[26]).

Sind der Träger C_1^1 und die beiden reellen Doppelstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ einer ischen windschief involutorischen linearen Kongruenz $C_1^1 (a a_i, s s_i)$ be- t, so ist auch die elliptisch involutorische Paarung von C_1^1 bestimmt. Jeder bene Strahl x liegt mit dem ihm in $C_1^1 (a a_i, s s_i)$ zugeordneten Strahle nd den Doppelstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in einer hyperbolisch involutorischen Regel- zweiter Ordnung von $C_1^1 (a a_i, s s_i)$ und ist folglich von x durch die alen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ harmonisch getrennt. In C_1^1 sei ferner eine zweite elliptische schief involutorische lineare Strahlenkongruenz durch ihre Doppel- llen $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ festgelegt. Dann liefert der soeben bewiesene Satz für zwei kale elliptische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenzen Ergebnis:

Zwei kollokale elliptische windschief involutorische lineare Strahlen- ruenzen haben zwei sich bedingende Strahlenpaare gemein. Das eine ht aus reellen Strahlen, das andere aus zwei konjugiert imaginären hlen zweiter Art (**17.**).

19. Bei den Tetraedern, deren Kanten reell oder paarweise konju- imaginär sind, unterscheiden wir zwei Hauptarten: die „hyperbolischen" die „elliptischen" Tetraeder. Zwei Gegenkantenpaare der ersteren einander bedingende Strahlenpaare (**17.**) in einer hyperbolischen ren Strahlenkongruenz, zwei Gegenkantenpaare der letzteren in einer ischen. Das dritte Paar Gegenkanten der hyperbolischen Tetraeder n die beiden reellen Leitgeraden der hyperbolischen, das dritte Paar nkanten der elliptischen Tetraeder die beiden konjugiert imaginären geraden der elliptischen Kongruenz.

Die hyperbolischen Tetraeder zerfallen in drei Unterarten:

a) Die hyperbolischen Tetraeder „erster Art" oder die reellen Tetra- Alle drei Paare Gegenkanten sind reell. Zwei Paare reeller einander genden Strahlenpaare in einer hyperbolischen linearen Strahlenkon- uz bilden mit den beiden Leitgeraden ein hyperbolisches Tetraeder r Art. Eine Regelfläche zweiten Grades, deren beide Strahlenscharen rbolisch involutorisch gepaart sind, bestimmt einen hyperbolischen art involutorischen Raum. Seine Involutionsachsen und die zwei e reeller Doppelstrahlen der beiden involutorischen Regelscharen sind rei Paare Gegenkanten eines hyperbolischen Tetraeders erster Art.

b) Die hyperbolischen Tetraeder „zweiter Art". Zwei Paare Gegen- en sind zwei Paare konjugiert imaginärer einander bedingenden Strahlen

[26]) v. Staudt, a. a O., Nr. 112 und Nr. 113.

in einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz, das dritte Paar derer reelle Leitgeraden. Eine Regelfläche zweiten Grades, deren beide Strahlenscharen elliptisch involutorisch gepaart sind, bestimmt einen hyperbolischen geschart involutorischen Raum[27]); seine Involutionsachsen und die zwei Paare konjugiert imaginärer Doppelstrahlen der beiden involutorischen Regelscharen sind die drei Paare Gegenkanten eines hyperbolischen Tetraeders zweiter Art.

c) Die hyperbolischen Tetraeder „dritter Art". Zwei Paare inzidente Kanten sind konjugiert imaginäre Strahlen erster Art einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz, die zwei übrigen Kanten deren Leitgeraden. Eine strahlenlose Fläche zweiten Grades F^2 und zwei für sie reziprok polare Strahlen u, v bestimmen einen die Fläche F^2 enthaltenden hyperbolischen geschart involutorischen Raum mit den Involutionsachsen u, v. Nur eine dieser beiden Achsen — etwa u — schneidet F^2 in reellen Punkten. Die in diesen Punkten die Fläche berührenden und für sie reziprok polaren Tangenten bilden die Elementenpaare zweier elliptisch involutorischen Strahlenbüschel, deren Doppelstrahlen zwei konjugiert imaginäre Geraden erster Art und die zwei Paare konjugiert imaginärer Kanten eines hyperbolischen Tetraeders dritter Art mit den reellen Gegenkanten u, v sind.

Die elliptischen Tetraeder haben zwei einander bedingende Strahlenpaare einer elliptischen linearen Kongruenz zu Gegenkantenpaaren. Ihre drei Gegenkantenpaare bestehen also aus einem Paare reeller und einem Paare konjugiert imaginärer Kongruenzstrahlen (17.) sowie aus den konjugiert imaginären Leitgeraden der Kongruenz. Eine Regelfläche zweiten Grades, deren eine Strahlenschar elliptisch, deren andere hyperbolisch involutorisch gepaart ist, bestimmt einen elliptischen geschart involutorischen Raum[21]). Die konjugiert imaginären Doppelstrahlen dieser und die reellen Doppelstrahlen jener involutorischen Regelschar sowie die konjugiert imaginären Involutionsachsen des geschart involutorischen Raumes sind die drei Paare Gegenkanten eines elliptischen Tetraeders.

In einer elliptischen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz und in einer hyperbolischen erster, zweiter oder dritter Art bilden die beiden Leitgeraden mit den vier Doppelstrahlen bzw. ein elliptisches oder ein hyperbolisches Tetraeder erster, zweiter oder dritter Art (13.).

20. Die Strahlenpaare einer hyperbolischen windschief involutorischen linearen Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ schneiden deren beide Leitgeraden u, v in den Punktepaaren je einer Involution (8.). Für alle Kollineationen, die beide Punktinvolutionen in sich selbst überführen und deren Doppel-

---

[27]) v. Staudt, a. a. O., Nr. 84 und Nr. 102.

ente in Ruhe lassen, ist also die hyperbolische windschief involutorische re Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ invariant.

Die Strahlenpaare einer elliptischen windschief involutorischen linearen gruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ bestehen aus gemeinsamen reziproken Polaren einen aus Regelflächen zweiter Ordnung gebildeten F^2-Büschel (**12.**). e Strahlenscharen seiner Flächen sind involutorisch gepaart und liegen geschart involutorischen Raume der Trägerkongruenz C_1^1. Die eine lenschar einer jeder dieser Flächen ist hyperbolisch, die andere ellip- involutorisch. Alle hyperbolisch involutorischen Strahlenscharen haben eiden reellen Doppelstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ zu Doppelstrahlen, elliptisch involutorischen die beiden konjugiert imaginären (**13.**).

Auf den Strahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ liegt, wie auf allen Strahlen des Trägers C_1^1 lliptischen windschief involutorischen Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$, je eine tische Punktinvolution, deren Elemente durch C_1^1 einander zugeordnet

Eine Kollineation, die beide Punktinvolutionen in sich selbst über-, führt also je zwei mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ inzidente durch C_1^1 einander zugeordnete len wiederum in zwei solche mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ inzidente Strahlen über. Sie andelt folglich alle elliptisch involutorischen Strahlenscharen auf den nen je eines F^2-Büschels in elliptisch involutorische Strahlenscharen, benfalls auf Flächen des F^2-Büschels enthalten sind, kurz jede Fläche F^2-Büschels in eine Fläche des nämlichen Büschels. Die Strahlen- e von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ bestehen aber aus gemeinsamen reziproken Polaren lle Flächen des F^2-Büschels. Sonach ist auch die elliptische wind- f involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ für alle Kolli- onen invariant, welche die auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gelegenen Involutionen der h C_1^1 einander zugeordneten Punkte in sich selbst überführen und i deren Doppelelemente in Ruhe lassen.

Nur eine Kollineation verwandelt aber zwei Punktinvolutionen, deren er zwei windschiefe Geraden sind, in sich selbst, läßt dabei die pelelemente der Involutionen in Ruhe, und weist zwei ge- ne Punkte P, P_1 oder Ebenen π, π_1 einander zu[28]). Also ist durch ehende Untersuchungen erwiesen:

Es gibt nur eine Kollineation φ_i, die eine gegebene windschief invo- ische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst überführt, deren Doppelstrahlen in Ruhe läßt, und zwei gegebene Punkte P, P_1 Ebenen π, π_1 einander zuweist.

[28]) Jolles, Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen, . f. d. reine u. angew. Math. **149** (1919), Nr. 20. Die in Sperrdruck hervorge- en Worte habe ich meiner früheren Fassung dieses am angeführten Orte be- nen Satzes hinzugefügt, um jedes Mißverständnis auszuschließen.

Je nachdem die windschief involutorische lineare Strahlenkongruen $C_1^1(aa_i, ss_i)$ hyperbolisch erster, zweiter oder dritter Art oder elliptisc ist (**13.**), haben die durch die Kollineation φ_i aufeinander bezogene Räume Σ, Σ_i bzw. ein hyperbolisches Tetraeder erster, zweiter oder dritte Art oder ein elliptisches Tetraeder (**19.**) zum Decktetraeder. Obiger Sat liefert somit nicht nur die Kriterien für die Realitätsbedingungen, welche das Decktetraeder zweier allgemeinen kollinearen Räume in jedem mö lichen Falle zu genügen hat, sondern auch die Konstruktionen dies Räume selbst. Gestützt auf ihn würden sich wesentliche Untersuchunge meiner Arbeit: Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kol neationen im Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 14 Nr. **21**—**30** übersichtlicher und vor allem auch vollständiger gestalten lasse

21. In einer hyperbolischen windschief involutorischen linearen Strahle kongruenz erster oder zweiter Art oder in einer elliptischen windschi involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ sind die Fläche zweier F^2-Büschel einscharig so enthalten, daß die eine Regelschar jed Fläche aus Strahlenpaaren von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ besteht (**14.**), die Strahle der andern durch die Trägerkongruenz C_1^1 von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ einander z geordnet sind. Gehen aber die Flächen eines F^2-Büschels durch Rege scharen zweiter Ordnung einer linearen Strahlenkongruenz, so bilden di nicht in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen der Flächen eine zweit lineare Kongruenz[29]). Folglich bilden die durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen auf den Flächen jedes der beiden F^2-Büschel eine lineare Kon gruenz. Die Leitgeraden der einen Strahlenkongruenz sind das eine Pa windschiefer Doppelstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, die Leitgeraden der andern das ande Paar windschiefer Doppelstrahlen $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ von $C_1^1(aa_i, ss_i)$. Je nachdem ei hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz erster od zweiter Art oder eine elliptische windschief involutorische lineare Strahle kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ vorliegt, sind jene beiden Strahlenkongruenze hyperbolisch oder elliptisch, oder die eine ist hyperbolisch und die ande elliptisch (**13.**).

Ist eine der beiden Strahlenkongruenzen hyperbolisch, so schneide ihre durch C_1^1 einander zugeordneten Strahlen jede ihrer zwei reellen Lei geraden in den Elementenpaaren einer Punktinvolution, und die einand zugeordneten Strahlen bilden somit die Strahlenpaare einer hyperbolische windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz. Bei der hype bolischen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz erster A $C_1^1(aa_i, ss_i)$ sind hiernach die beiden mitbestimmten linearen Strahle

[29]) Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenko gruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **134** (1908), Nr. 12.

ruenzen hyperbolisch. Ihre durch C_1^1 einander zugeordneten Strahlen die Elementenpaare zweier hyperbolischen windschief involutorischen ren Strahlenkongruenzen bzw. mit den reellen Doppelstrahlen u, v, c, b u, v, a, b.

Bei der hyperbolischen windschief involutorischen linearen Strahlenruenz zweiter Art $C_1^1(aa_i, ss_i)$ haben die beiden F^2-Büschel, deren hen in $C_1^1(aa_i, ss_i)$ gelegene involutorische Regelscharen zweiter Ord- enthalten, zu Basiskurven Raumvierseite, deren zwei Paare Gegenn die reellen Leitgeraden u, v und bzw. die konjugiert imaginären schiefen Doppelstrahlen a, b und c, b von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ sind (14.). beiden durch $C_1^1(aa_i, ss_i)$ mitbestimmten linearen Strahlenkongruenzen isen sich also als elliptisch. — In jeder von ihnen sind je zwei durch inander zugeordnete Strahlen durch u, v harmonisch getrennt. Somit n ihre Elementenpaare zwei elliptische windschief involutorische re Strahlenkongruenzen mit den reellen Doppelstrahlen u, v und bzw. konjugiert imaginären Doppelstrahlen c, b und a, b.

Bei der elliptischen windschief involutorischen linearen Strahlenkonnz $C_1^1(aa_i, ss_i)$, bei der ja zwei windschiefe Doppelstrahlen — etwa — reell und also die anderen beiden c, b konjugiert imaginär sind , ist die eine mitbestimmte lineare Strahlenkongruenz hyperbolisch den Leitgeraden a, b. Ihre Strahlen sind durch die Kongruenz C_1^1 epaart, daß sie eine hyperbolische windschief involutorische lineare ruenz zweiter Art mit den konjugiert imaginären Doppelstrahlen u, v c, b bilden. Die andere mitbestimmte lineare Strahlenkongruenz ist isch und hat die konjugiert imaginären Leitgeraden c, b. Ihre Ele- e sind die durch C_1^1 einander zugeordneten Strahlen auf den Flächen F^2-Büschels, dessen Basiskurve aus dem Raumvierseit mit den konrt imaginären Gegenseiten u, v und c, b besteht. Für die Flächen s F^2-Büschels sind die reellen Doppelstrahlen a, b von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ rok polar und folglich zusammengehörige Involutionsachsen[30]) für die utorischen Regelscharen zweiter Ordnung, in denen die durch C_1^1 ein- zugeordneten Strahlen der Flächen liegen. Die Doppelstrahlen a, b en also je zwei dieser durch C_1^1 einander zugeordneten Strahlen harch. Die Gesamtheit der durch C_1^1 einander zugeordneten Strahlen en Flächen des F^2-Büschels bildet somit die Elementenpaare einer ischen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz mit den n Doppelstrahlen a, b und den konjugiert imaginären Doppelstrahlen

Aus den vorstehenden Überlegungen folgt hiernach:

[30]) v. Staudt, a. a. O., Nr. 79 und Nr. 105.

Mit einer windschief involutorischen linearen Strahlenkongruen $C_1^1(aa_i, ss_i)$ *sind gleichzeitig zwei andere windschief involutorische linear* *Strahlenkongruenzen gegeben. Ihre Elementenpaare bestehen aus Strahlen* *die durch die Trägerkongruenz* C_1^1 *einander zugeordnet sind. Jeder de* *beiden* F^2*-Büschel, dessen Flächen eine Schar involutorischer Regel* *scharen zweiter Ordnung von* $C_1^1(aa_i, ss_i)$ *trägt, trägt auch eine Scha* *involutorischer Regelscharen aus einer dieser beiden windschief involu* *torischen linearen Strahlenkongruenzen. Jede dieser zwei windschief involu* *torischen linearen Strahlenkongruenzen hat ein andres Paar Doppe* *strahlen von* $C_1^1(aa_i, ss_i)$ *zu Leitgeraden und ein andres Paar Doppe* *strahlen mit* $C_1^1(aa_i, ss_i)$ *gemein. Von den drei windschief involutorische* *linearen Strahlenkongruenzen bestimmt jede auf gleiche Weise die beide* *anderen.*

22. Eine Kollineation φ_i zweier Räume Σ, Σ_i führe eine gegeben windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sic selbst über, lasse deren Leit- und Doppelstrahlen in Ruhe und weise zwe gegebene Punkte oder Ebenen einander zu. Die Kollineation φ_i ist da durch definiert (**20.**). Sie führt jeden der beiden F^2-Büschel, desse Flächen je eine involutorische Regelschar zweiter Ordnung von $C_1^1(aa_i, ss$ enthalten, in sich selbst über und folglich auch die beiden windschief in volutorischen linearen Strahlenkongruenzen, die $C_1^1(aa_i, ss_i)$ mitbestimm (**21.**). Dabei bleiben die Leit- und Doppelstrahlen der windschief invo lutorischen Kongruenzen in Ruhe. Jede der beiden windschief involut rischen linearen Strahlenkongruenzen kann demnach bei der Definitio der Kollineation φ_i die windschief involutorische lineare Strahlenkongrue $C_1^1(aa_i, ss_i)$ vertreten. In anderen Worten:

Haben zwei kollineare Räume Σ, Σ_i *ein einziges Decktetraeder,* *bildet jedes Paar seiner Gegenkanten die (reellen oder konjugiert imag* *nären) Leitgeraden einer windschief involutorischen linearen Strahle* *kongruenz, die durch die Kollineation* φ_i *von* Σ, Σ_i *so in sich selb* *übergeführt wird, daß dabei die Kanten des Tetraeders in Ruhe bleibe* *Die Kollineation* φ_i *ist in gleicher Weise durch jede der drei windschi* *involutorischen linearen Kongruenzen und durch zwei gegebene homolo* *Punkte* P, P_i *oder Ebenen* π, π_i *von* Σ, Σ_i *bestimmt.*

C. Die singuläre windschief involutorische lineare Strahlenkongruen

23. Eine involutorisch gepaarte lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, s$ heiße „singulär windschief involutorisch", wenn je zwei ihrer Strahle paare in einer Regelschar zweiter Ordnung liegen. Durch eine halbg scharte Kollineation lassen sich niemals die Strahlen einer linearen Ko

nz C_1^1 singulär windschief involutorisch paaren (**10.**), ebensowenig h die Korrelation eines sekundären polaren Raumes von C_1^1 (**12.**). gegen ordnet die Korrelation jedes primären polaren Raumes von d. h. die Korrelation des polaren Raumes jeder einscharig in C_1^1 ent- enen reellen oder imaginären Regelfläche zweiten Grades, die Strahlen C_1^1 so, daß je zwei Strahlenpaare in einer Regelschar zweiter Ordnung n[31]), also singulär windschief involutorisch.

Eine singuläre windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $a a_i, s s_i$) *ist in der Strahlenkongruenz* C_1^1 *durch zwei ihrer Strahlen- e* m, m_1 *und* n, n_1 *bestimmt.*

Durch einen gegebenen Stahl x von C_1^1 gehen nämlich die Regel- ren zweiter Ordnung $x m m_1$ und $x n n_1$ der Kongruenz. Das Strahlen- x, x_1 von $C_1^1(a a_i, s s_i)$ liegt der Voraussetzung nach in beiden Regel- ren, folglich ist x_1 der Strahl, den sie außer x gemein haben.

Alle einscharig in C_1^1 enthaltenen Regelflächen zweiten Grades, für he die Strahlen m, m_1 reziprok polar sind, bilden einen F^2-Büschel[32]); nthält eine Fläche N^2, für welche auch die Strahlen n, n_1 reziprok r sind[31]). Für N^2 ist aber die Kongruenz polarinvariant und die Paa- ihrer Strahlen singulär windschief involutorisch. Folglich ist dargetan:

Die Strahlenpaare jeder singulären windschief involutorischen line- Strahlenkongruenz $C_1^1(a a_i, s s_i)$ *in der Kongruenz* C_1^1 *bestehen aus proken Polaren je eines primären polaren Raumes von* C_1^1, *d. h. aus proken Polaren für je eine in* C_1^1 *einscharig enthaltene (reelle oder ginäre) Regelfläche zweiten Grades* N^2. *In der singulären windschief olutorischen linearen Strahlenkongruenz* $C_1^1(a a_i, s s_i)$ *liegen* ∞^1 *Doppel- hlen; sie bilden die in* C_1^1 *enthaltene Strahlenschar* $\mathfrak{R}_N^2$ *jener Regel- he.*

Eine lineare Strahlenkongruenz bestimmt ein Gebüsch[33]) von einscharig hr enthaltenen Regelflächen zweiter Ordnung:

Die Strahlen einer linearen Kongruenz lassen sich also auf ∞^3 *isen singulär windschief involutorisch paaren.*

In einer singulären windschief involutorischen linearen Strahlenkon- enz $C_1^1(a a_i, s s_i)$ gehen ∞^1 involutorische Regelscharen zweiter Ordnung ch ein gegebenes Strahlenpaar von $C_1^1(a a_i, s s_i)$, durch alle Strahlen- re von $C_1^1(a a_i, s s_i)$ aber ∞^2, sie liegen auf den Flächen eines Bündels[34]).

---

[31]) Jolles, a. a. O., Nr. 8.
[32]) Jolles, a. a. O., Nr. 7.
[33]) Jolles, a. a. O., Nr. 5.
[34]) Jolles, a. a. O., Nr. 9.

Eine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz hat nur primäre polare Räume mit reellen, eine elliptische auch solche mit imaginären einscharig in ihr enthaltenen Inzidenzflächen[11]). Somit bilden die Doppelstrahlen einer singulären hyperbolischen windschief involutorischen Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ eine reelle Regelschar zweiter Ordnung. Die singulären elliptischen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen hingegen zerfallen in die „erster Art", deren Doppelstrahlen eine reelle und in die „zweiter Art", deren Doppelstrahlen eine imaginäre Regelschar zweiter Ordnung bilden.

24. $\mathfrak{R}^2(pp_i, qq_i)$ sei eine der ∞^2 involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung einer singulären windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ (**23.**). Sie bestimmt einen sie enthaltenden Nullraum[35]). Wird nun ein gegebener Strahl x sowohl mit den Strahlen p, p_i wie q, q_i durch die Regelscharen zweiter Ordnung xpp_i und xqq_i verbunden, so schneiden sich diese Regelscharen, da der x im Nullraume zugeordnete Strahl x' in jeder von ihnen liegt[36]), in x und x'. Unter der Voraussetzung, daß x ein Strahl der Kongruenz C_1^1 ist, liegt aber das Strahlenpaar x, x_i der singulären windschief involutorischen Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ ebenfalls in beiden Regelscharen (**23.**). Folglich sind dann x', x_i identisch, und es gilt:

Jede der ∞^2 involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung einer singulären windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz bestimmt den nämlichen Nullraum. In ihm sind je zwei einander zugeordnete Strahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ einander zugeordnet, und sein linearer Komplex Γ enthält die Leitscharen von ∞^2 involutorischen Regelscharen.

Es gibt nur einen primären polaren Raum der linearen Kongruenz C_1^1, in dem jedes Elementenpaar von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ aus reziproken Polaren besteht (**23.**). Für den linearen Komplex Γ ist dieser polare Raum und seine Inzidenzfläche N^2 nullinvariant. In Γ liegt die von den Doppelstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ gebildete Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}_N^2$ der Inzidenzfläche N^2.

Bei einer singulären hyperbolischen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ enthält der Komplex Γ die beiden Leitgeraden u, v von C_1^1. Somit sind die Leitstrahlen der von den Doppelstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ gebildeten Regelschar $\mathfrak{R}_N^2$ sowohl durch die Kongruenz C_1^1 wie auch durch den Komplex Γ in derselben hyperbolischen Involution mit den Doppelstrahlen u, v einander zugeordnet.

[35]) Chasles, Propriétés nouvelles de l'Hyperboloide à une nappe, Journ. de Math. 4 (1839), S. 348.

[36]) Moebius, Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **10** (1833), Nr. 18.

Bei einer singulären elliptischen windschief involutorischen linearen
lenkongruenz erster Art $C_1^1(aa_i, ss_i)$ (**23.**) ist jedes Strahlenpaar
die Inzidenzfläche N^2 harmonisch getrennt. Folglich ist jede invo-
ische Regelschar zweiter Ordnung von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ hyperbolisch, und
Doppelstrahlen sind die beiden Strahlen, die sie mit der aus den
elstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ gebildeten Regelschar $\mathfrak{R}_N^2$ von N^2 ge-
hat. Je zwei durch die Kongruenz C_1^1 einander zugeordnete Leit-
len l, l' einer gegebenen involutorischen Regelschar zweiter Ordnung
$pp_i, qq_i)$ von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ sind nun, da $\mathfrak{R}^2(pp_i, qq_i)$ für N^2 polar-
iant ist, für N^2 reziprok polar[37]), also ein Paar Gegenseiten eines
chen Raumvierseits, dessen andres Paar Gegenseiten die Doppel-
len von $\mathfrak{R}^2(pp_i, qq_i)$ sind, und dessen Diagonalen zwei durch C_1^1
der zugeordnete Leitstrahlen von $\mathfrak{R}_N^2$ bilden. l, l' liegen aber als
trahlen einer involutorischen Regelschar zweiter Ordnung von
$aa_i, ss_i)$ nach obigem Satze im Komplexe Γ ebenso, wie gleich darauf
gt wurde, die Doppelstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$. Somit sind die mit
Diagonalen des Raumvierseits zusammenfallenden durch C_1^1 einander
ordneten Leitgeraden von $\mathfrak{R}_N^2$ ebenfalls durch Γ einander zugeordnet.
bei der singulären elliptischen windschief involutorischen linearen
lenkongruenz erster Art fallen hiernach je zwei durch die Kongruenz
der zugeordnete Leitstrahlen der Regelschar $\mathfrak{R}_N^2$ zusammen mit den
den Komplex Γ einander zugeordneten Leitstrahlen dieser Regel-
r. Kurz:

Eine in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 einscharig enthaltene
lfläche zweiter Ordnung N^2 bedingt dieselbe singuläre windschief
lutorische Paarung der Kongruenzstrahlen wie der lineare Komplex Γ
Nullraumes, der die durch C_1^1 involutorisch gepaarte Regelschar der
he N^2 enthält.

Jede durch die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 involutorisch gepaarte
lschar zweiter Ordnung, deren Leitschar in C_1^1 liegt, bestimmt einen
ien linearen Komplex Γ; es gibt also deren ∞^3.

Die beiden Arten windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen in einem geschart involutorischen Raume.

25. Zwei windschiefe Strahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ einer linearen Strahlenkon-
nz C_1^1 bedingen in ihr ein zweites Paar $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ (**17.**). Jedes der beiden
lenpaare besteht aus den Doppelstrahlen je einer Schar von ∞^1
lscharen zweiter Ordnung im geschart involutorischen Raume Σ_g von
Beide Scharen werden von demselben F^2-Büschel $F^2(\mathfrak{acbd})$ ge-

[37]) Jolles, a. a. O., Nr. 11.

tragen[25]). Seine Basiskurve ist das von den einander bedingenden Strahlenpaaren a, b und c, b gebildete Raumvierseit $acbb$. Die Diagonalen des Vierseits sind die beiden Leitgeraden u, v von C_1^1. Diese sowie je zwei Gegenseiten des Vierseits können konjugiert imaginär sein.

Die von je zwei einander bedingenden Strahlenpaaren der linearen Kongruenz C_1^1 mit den Leitgeraden u, v bzw. gebildeten zwei einfachen Raumvierseite sind die Basiskurven zweier „einander bedingenden" F^2-Büschel, deren Flächen einscharig in C_1^1 enthalten sind; insbesondere gilt dies von den F^2-Büscheln $F^2(aubv)$ und $F^2(cubv)$ mit den Basisvierseiten $aubv$ und $cubv$. Je zwei im geschart involutorischen Raume Σ_g von C_1^1 einander zugeordnete Ebenenbüschel erster Ordnung, deren Achsen auf einer Fläche des F^2-Büschels $F^2(acbb)$ liegen, erzeugen die Regelschar einer Fläche des Büschels $F^2(aubv)$ oder $F^2(cubv)$, je nachdem durch jene Achsen und c, b oder a, b eine Regelschar zweiter Ordnung geht. Alle in C_1^1 enthaltenen Regelscharen der Flächen der einander bedingenden Büschel $F^2(aubv)$ und $F^2(cubv)$ können so erzeugt werden[38]). Die mit a, b inzidenten in Σ_g einander zugeordneten Strahlen der Flächen des Büschels $F^2(acbb)$ sind reziprok polar für die Flächen des Büschels $F^2(aubv)$ und bilden eine windschief involutorische lineare Kongruenz mit den Leitgeraden a, b und den Doppelstrahlen u, v und c, b. Ebenso sind die mit c, b inzidenten in Σ_g einander zugeordneten Strahlen der Flächen des Büschels $F^2(acbb)$ reziprok polar für die Flächen des Büschels $F^2(cubv)$ und die Strahlenpaare einer windschief involutorischen Kongruenz mit den Leitgeraden c, b und den Doppelstrahlen u, v und a, b. Heißen nunmehr zwei im geschart involutorischen Raume Σ_g enthaltene windschief involutorische lineare Strahlenkongruenzen, deren Leitgeraden einander bedingende Strahlenpaare seiner linearen Kongruenz C_1^1 sind, „einander bedingend", so gilt:

Zwei einander bedingende windschief involutorische lineare Strahlenkongruenzen $C_1^1(a, b)$ und $C_1^1(c, b)$ eines geschart involutorischen Raumes Σ_g, deren Leitgeraden bzw. die einander bedingenden Strahlenpaare a, b und c, b seiner linearen Kongruenz C_1^1 sind, enthalten je eine Schar involutorischer Regelscharen zweiter Ordnung, die von dem F^2-Büschel $F^2(acbb)$ mit dem Basisvierseit $acbb$ getragen wird. Die zweiten Scharen involutorischer Regelscharen zweiter Ordnung (14.) *in den einander bedingenden windschief involutorischen Kongruenzen $C_1^1(a, b)$ und $C_1^1(c, b)$ werden bzw. von den F^2-Büscheln $F^2(aubv)$ und $F^2(cubv)$ mit den Basisvierseiten $aubv$ und $cubv$ getragen, deren Flächen einscharig in der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 von Σ_g liegen. Jede Fläche*

[38]) Jolles, a. a. O., Nr. 18—21.

s der drei Büschel $F^2(acbb)$, $F^2(aubv)$ und $F^2(cubv)$ ist für alle chen der beiden übrigen Büschel polar invariant[39]).

Das Basisvierseit eines F^2-Büschels, dessen Flächen einscharig in r linearen Strahlenkongruenz C_1^1 liegen, enthält stets zwei (reelle oder jugiert imaginäre) Strahlen von C_1^1. Demnach schließen wir aus dem tehenden Satze insbesondere:

Sind die Flächen eines F^2-Büschels einscharig in einer linearen hlenkongruenz C_1^1 enthalten, so haben sie ∞^2 Paare gemeinsamer re- oken Polaren. Die beiden Strahlen jedes Paares sind im geschart lutorischen Raume Σ_g von C_1^1 einander zugeordnet, und die Gesamt- aller Paare bildet eine in Σ_g enthaltene windschief involutorische are Strahlenkongruenz, sie hat zu Leitgeraden die beiden allen Flächen F^2-Büschels gemeinsamen (reellen oder konjugiert imaginären) Strahlen C_1^1. In einem hyperbolischen geschart involutorischen Raume sind in ihm enthaltenen windschief involutorischen linearen Strahlenkongru- n entweder hyperbolisch erster Art oder elliptisch. In einem elliptischen hart involutorischen Raume sind sie hyperbolisch zweiter Art oder tisch.

Alle einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen elflächen zweiter Ordnung bilden ein F^2-Gebüsch[40]). In einem F^2- üsche liegen ∞^4 F^2-Büschel. Je zwei windschiefe (reelle oder kon- ert imaginäre) Strahlen von C_1^1 bestimmen mit den Leitgeraden u, v C_1^1 das Basisvierseit eines solchen Büschels. Aus dem soeben ge- nenen Ergebnisse folgern wir somit:

Ein geschart involutorischer Raum Σ_g enthält ∞^4 windschief involuto- he lineare Strahlenkongruenzen, deren Leitgeraden je zwei (reelle oder kon- ert imaginäre) windschiefe Strahlen seiner linearen Strahlenkongruenz C_1^1 . Die ∞^4 windschief involutorischen linearen Kongruenzen haben erdem noch je ein zweites Paar (reeller oder konjugiert imaginärer) dschiefer Strahlen von C_1^1 zu Doppelstrahlen und zu gemeinsamen ppelstrahlen die beiden Leitgeraden u, v von C_1^1.

26. Zwei konjugiert imaginäre einander zugeordnete Punkte oder Ebenen s geschart involutorischen Raumes sind durch seine beiden Leitgeraden monisch getrennt. Von vier harmonischen Elementen einer Punktreihe eines Strahlenbüschels erster Ordnung oder einer Regelschar zweiter nung können nur zwei einander zugeordnete Elemente konjugiert imaginär folglich enthält der hyperbolische geschart involutorische Raum kon-

[39]) Jolles, a. a. O., Nr. 21.
[40]) Jolles, a. a. O., Nr. 5.

jugiert imaginäre einander zugeordnete Punkte, Ebenen oder windschiefe Strahlen, nicht aber der elliptische geschart involutorische.

Je zwei konjugiert imaginäre windschiefe einander zugeordnete Strahlen eines hyperbolischen geschart involutorischen Raumes Σ_g^h bilden ein Strahlenpaar einer hyperbolisch involutorischen Regelschar zweiter Ordnung, deren Doppelstrahlen die Involutionsachsen u, v von Σ_g^h sind, und deren Leitschar aus Doppelstrahlen von Σ_g^h besteht. Die konjugiert imaginären einander zugeordneten Strahlen der hyperbolisch involutorischen Regelschar zweiter Ordnung sind bzw. die Doppelstrahlen von ∞^1 in ihrem Träger gelegenen elliptisch involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung mit dem gemeinsamen Strahlenpaare u, v. Die hyperbolisch involutorische Regelschar enthält also ∞^1 konjugiert imaginäre einander zugeordnete Strahlen von Σ_g^h. Im hyperbolischen geschart involutorischen Raume liegen nun ∞^3 hyperbolisch involutorische Regelscharen zweiter Ordnung mit den Doppelstrahlen u, v; er enthält demnach ∞^4 konjugiert imaginäre windschiefe einander zugeordnete Strahlen, während der elliptische geschart involutorische Raum, wie schon hervorgehoben wurde, nur reelle einander zugeordnete Strahlen umfaßt.

Je zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) windschiefe einander zugeordnete Strahlen eines geschart involutorischen Raumes Σ_g bestimmen eine in seiner linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltene Regelschar zweiter Ordnung, deren Leitstrahlen sie sind. Eine in Σ_g enthaltene windschiefe involutorische Strahlenkongruenz hat daher niemals zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) einander zugeordnete Strahlen von Σ_g zu Leitgeraden, sondern stets zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlen von C_1^1. Der geschart involutorische Raum Σ_g enthält folglich nur und nur allein die ∞^4 in **25** abgeleiteten windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen.

27. Sei $\mathfrak{L}^2(aa_i, bb_i, \ldots)$ die in einem geschart involutorischen Raume Σ_g enthaltene involutorische Leitschar einer Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ seiner linearen Strahlenkongruenz C_1^1, und sei $\mathfrak{L}'^2(aa_i', bb_i', \ldots)$ eine zweite von der Regelschar $\mathfrak{L}^2$ getragene involutorische Regelschar. Die Projektivität von $\mathfrak{L}'^2(aa_i', bb_i', \ldots)$ führe die involutorische Regelschar $\mathfrak{L}^2(aa_i, bb_i, \ldots)$ in sich selbst über.

In einem hyperbolischen geschart involutorischen Raume Σ_g ist $\mathfrak{L}'^2(aa_i', bb_i', \ldots)$ entweder eine hyperbolisch involutorische Regelschar zweiter Ordnung, deren Doppelstrahlen in $\mathfrak{L}^2(aa_i, bb_i, \ldots)$ einander zugeordnet sind, oder eine elliptisch involutorische Regelschar zweiter Ordnung, deren eines Strahlenpaar aus den Doppelstrahlen von $\mathfrak{L}^2(aa_i, bb_i \ldots)$ den beiden Involutionsachsen u, v, von Σ_g, besteht. In einem elliptischen ge

art involutorischen Raume Σ_g ist $\mathfrak{L}'^2(aa_i, bb_i', \ldots)$ eine hyperbolisch olutorische Regelschar zweiter Ordnung, deren Doppelstrahlen ein Elentenpaar von $\mathfrak{L}^2(aa_i, bb_i, \ldots)$ bilden. In beiden Fällen gibt es einen zigen geschart involutorischen Raum Σ_g', der die involutorische Regelar $\mathfrak{L}'^2(aa_i', bb_i', \ldots)$ enthält und die Strahlen von $\mathfrak{R}^2$ zu Doppelstrahlen [34]). Die übrigen Doppelstrahlen von Σ_g' sind paarweise für die Fläche der beiden Regelscharen $\mathfrak{R}^2$ und $\mathfrak{L}^2$ reziprok polar und dabei gleichtig zusammengehörige Involutionsachsen[30]) der involutorischen Regelschar $(aa_i', bb_i', \ldots)$.

In einem hyperbolischen geschart involutorischen Raume Σ_g bilden ne beiden Involutionsachsen u, v ein Strahlenpaar von $\mathfrak{L}'^2(aa_i', bb_i', \ldots)$ d trennen somit je zwei zusammengehörige Involutionsachsen dieser inutorischen Regelschar harmonisch. Je zwei für die Fläche F^2 reziprok are Strahlen der linearen Kongruenz von Σ_g' sind folglich in Σ_g einder zugeordnet.

Bei einem elliptischen geschart involutorischen Raume Σ_g ist der gart involutorische Raum Σ_g' hyperbolisch. Seine Involutionsachsen bilden Strahlenpaar s, s_i der involutorischen Regelschar $\mathfrak{L}^2(aa_i, bb_i, \ldots)$ und die ppelstrahlen der hyperbolisch involutorischen Regelschar $\mathfrak{L}'^2(aa_i', bb_i', \ldots)$. zwei für die Fläche F^2 reziprok polare Strahlen p', q' der linearen Konenz von Σ_g' bilden nun mit s, s_i die zwei Paare Gegenseiten eines einhen Raumvierseits, dessen Diagonalen zwei Strahlen der Regelschar $\mathfrak{R}^2$, o gemeinsame Strahlen der linearen Kongruenzen von Σ_g und Σ_g' sind. zwei für F^2 reziprok polare Strahlen p', q' der linearen Kongruenz n Σ_g' erweisen sich hiernach in Σ_g einander zugeordnet.

Das Gesamtergebnis unserer Untersuchung lautet somit:

Haben zwei lineare Strahlenkongruenzen eine gemeinsame Regelschar eiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$, und bilden die durch die Kongruenzen einander zurdneten Leitstrahlen von $\mathfrak{R}^2$ zwei involutorische Regelscharen zweiter dnung, deren Projektivitäten füreinander invariant sind, so sind die ahlen jeder der beiden Kongruenzen durch die andere singulär windief involutorisch gepaart. Die Doppelstrahlen beider singulären windief involutorischen Kongruenzen bilden die Regelschar $\mathfrak{R}^2$.

In dem geschart involutorischen Raume einer jeden der zwei linearen ngruenzen sind die Involutionsachsen des andern einander zugeordnet, ach folgt weiter:

Je zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) einander zugeordnete Gelen eines geschart involutorischen Raumes sind die Leitgeraden einer ihm enthaltenen singulären windschief involutorischen linearen Strahlengruenz.

Im hyperbolischen geschart involutorischen Raume liegen ∞^4 reell und ∞^4 konjugiert imaginäre einander zugeordnete Geraden (**26.**), im elliptischen nur ∞^4 reelle einander zugeordnete Geraden. Also:

Der geschart involutorische Raum enthält ∞^4 singuläre windschiefe involutorische lineare Strahlenkongruenzen. Ist er hyperbolisch, so sind unter ihnen ∞^4 elliptisch erster Art und ∞^4 hyperbolisch; ist er elliptisch, so sind alle hyperbolisch.

E. Die beiden Arten windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen in einem polaren Raume.

28. Durch zwei Paare windschiefer reziproken Polaren $a, a_i; s, s_i$ in einem polaren Raume Π, die nicht in einer Regelschar zweiter Ordnung liegen, geht eine lineare Strahlenkongruenz, deren übrige Strahlen ebenfalls in Π paarweise reziprok polar sind[14]). $a, a_i; s, s_i$ und diese Strahlenpaare bilden (**12.**) eine windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1(aa_i, ss_i)$. Fallen a, a_i und s, s_i mit je zwei Paaren reziproker Polaren von Π zusammen, die nicht in einer Regelschar zweiter Ordnung liegen, so fällt $C_1^1(aa_i, ss_i)$ nacheinander in alle in Π enthaltenen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen. Durch zwei gegebene Punkte P, Q schickt jede einen Strahl. Jeder Strahl von P bestimmt mit jedem Strahle von Q eine von ihnen. Daraus schließen wir:

Ein polarer Raum Π enthält ∞^4 windschief involutorische lineare Strahlenkongruenzen. Sie sind alle hyperbolisch, wenn die Inzidenzfläche von Π imaginär ist[41]).

Jede der ∞^4 windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen enthält, wenn die Inzidenzfläche von Π eine reelle Regelfläche zweiter Ordnung oder imaginär ist, zwei Scharen involutorischer Regelscharen zweiter Ordnung (**14.**). Die Scharen werden je von einem F^2-Büschel getragen, und die Flächen beider Büschel sind involutorische Flächen von Π. In einem polaren Raume mit strahlenloser Inzidenzfläche sind diese Paare von F^2-Büscheln imaginär.

29. Eine involutorische Strahlenschar $\mathfrak{R}^2$ einer Regelfläche zweiter Ordnung F^2 bestimmt einen sie enthaltenden geschart involutorischen Raum Σ_g, der die Elemente der zweiten Strahlenschar $\mathfrak{L}^2$ von F^2 zu Doppelstrahlen hat[24]). Die übrigen Elemente der Doppelstrahlenkongruenz C_1^1 von Σ_g sind für F^2 paarweise reziprok polar. Sie bilden die Strahlenpaare einer singulären hyperbolischen windschief involutorischen

[41]) Jolles, Die Ermittlung hyperbolischer und elliptischer linearer Strahlenkongruenzen aus zwei Paar reziproker Polaren für eine Fläche zweiter Ordnung, Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 25.

nearen Strahlenkongruenz, und deren Doppelelemente sind die Strahlen on $\mathfrak{L}^2$. Die Strahlen einer Regelschar zweiter Ordnung lassen sich nun uf ∞^2 Weisen involutorisch paaren. Sonach liegen im polaren Raume nserer Fläche zweiter Ordnung ∞^2 singuläre windschief involutorische neare Strahlenkongruenzen, welche die Elemente von $\mathfrak{L}^2$ zu Doppelstrahlen aben. Analog ergeben sich die Strahlen von $\mathfrak{R}^2$ als die Doppelelemente on ∞^2 windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen dieses poren Raumes.

Der vorstehende Beweis verlangt die Realität der Regelfläche zweiter rdnung F^2; ein Beweis, bei dem F^2 sowohl reell wie auch imaginär sein ann, ist der folgende:

Sind a, a_i zwei reziproke Polaren in einem polaren Raume Π, so sind , a_i gleichzeitig reziproke Polaren in ∞^1 polaren Räumen, deren Korretionen in a und a_i dieselben Involutionen konjugierter Punkte und Ebenen estimmen[42]). Π und die polaren Räume bilden eine Büschelschar porer Räume. Ihre Inzidenzflächen sind reelle Regelflächen zweiten Grades, enn — was wir nunmehr voraussetzen — die Inzidenzfläche von Π eine reelle egelfläche zweiten Grades ist. Sei E^2 eine der reellen Regelflächen, dann estimmen a, a_i als zusammengehörige Involutionsachsen[30]) je eine Involution in jeder der zwei Strahlenscharen $\mathfrak{M}^2, \mathfrak{N}^2$ von E^2. Durch die Involution von $\mathfrak{M}^2$ geht ein einziger sie enthaltender geschart involutorischer Raum $\Sigma_g^{\mathfrak{M}}$, der die Strahlen von $\mathfrak{N}^2$ zu Doppelstrahlen hat[24]), und ebenso durch die Involution von $\mathfrak{N}^2$ ein einziger geschart involutorischer Raum $\Sigma_g^{\mathfrak{N}}$, dessen Doppelstrahlen die Regelschar $\mathfrak{M}^2$ bilden. Die linearen Kongruenzen von $\Sigma_g^{\mathfrak{M}}$ und $\Sigma_g^{\mathfrak{N}}$ enthalten die zusammengehörigen Involutionsachsen a, a_i. Die lineare Kongruenz von $\Sigma_g^{\mathfrak{M}}$ geht[43]) durch die Regelschar $\mathfrak{N}^2$ und die eine und die von $\Sigma_g^{\mathfrak{N}}$ durch die Regelschar $\mathfrak{M}^2$ und die andere Regelschar der (reellen oder imaginären) Inzidenzfläche F^2 von Π. Beschreibt der Strahl a um einen gegebenen auf ihm gelegenen Punkt A einen Bündel, so bestimmen der Strahl a und seine reziproke Polare a_i in Π sowie die in a, a_i durch die Korrelation von Π hervorgerufenen Involutionen konjugierter Punkte und Ebenen ∞^2 Büschelscharen polarer Räume und ∞^2 Paare linearer Strahlenkongruenzen. Die beiden Elemente jedes Paares linearer Strahlenkongruenzen gehen durch verschiedene Strahlenscharen von F^2. Die Korrelation von Π paart aber die Strahlen aller dieser linearen Strahlenkongruenzen singulär windschief involutorisch, also folgern wir:

[42]) Reye, Die Geometrie der Lage, 3. Abteilung, 3. Auflage, Leipzig (1892), Nr. 18, S. 181.

[43]) Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **134** (1908), Nr. 7.

Ist die Inzidenzfläche F^2 eines polaren Raumes Π eine reelle Regelfläche zweiten Grades oder imaginär, so enthält der polare Raum ∞ Paare reeller singulären windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen. Jedes Paar besteht aus zwei singulären windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen, von denen jede die Strahlen einer andern Regelschar von F^2 zu Doppelstrahlen hat.

In jeder der ∞^3 singulären windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen liegt eine Schar von ∞^3 involutorischen Regelscharen zweiter Ordnung (**23.**), und jede Schar wird von einem F^2-Bündel getragen[44]. Die Flächen dieser F^2-Bündel sind involutorische Flächen des polaren Raumes Π von F^2. Im polaren Raume einer strahlenlosen Inzidenzfläche liegen keine reellen singulären windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen und folglich auch keine reellen involutorischen Regelflächen zweiten Grades.

Die windschief involutorischen und die singulären windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenzen eines polaren Raumes bilden zusammen seine polaren linearen Strahlenkongruenzen. Von nun an dürften in einem polaren Raume nicht nur seine polaren ebenen Felder und zentrischen Bündel sondern auch seine polaren linearen Strahlenkongruenzen zu untersuchen sein.

Berlin-Halensee, den 20. Januar 1921.

---

[44]) Den Zusammenhang dieser F^2-Bündel und der für den polaren Raum invarianten zwei Bündel linearer Komplexe erweist meine Arbeit: Die für die Korrelation eines polaren Raumes invarianten linearen Komplexe und die aus ihnen gebildeten zwei Γ-Bündel, Math. Zeitschr. **3** (1919).

(Eingegangen am 11. April 1921.)

Zur Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen.

Von

J. Horn in Darmstadt.

In §§ 5—7 der Arbeit „Laplacesche Integrale als Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen“ [1]) ist über partikuläre Lösungen der Differentialgleichung

(D) $$x^{k+1}\frac{dy}{dx}+y=f(x,y),$$

$$f(x,y)=\sum A_{\lambda\mu}x^{\lambda}y^{\mu} \qquad (\lambda=1,\ \mu=0;\ \lambda+\mu\geqq 2)\ ^{2})$$

unter der Annahme, daß die ganze positive Zahl k größer als 1 [3]) ist, ein Satz [4]) bewiesen, welcher in § 2 der Arbeit „Verallgemeinerte Laplacesche Integrale als Lösungen linearer und nichtlinearer Differentialgleichungen“ [5]) in einfacherer Form entwickelt ist [6]). In A. §§ 9, 12—13 sind Lösungen unserer Differentialgleichung dargestellt, welche eine willkürliche Konstante enthalten [7]). Diese Lösungen wollen wir im I. Abschnitt der vorliegenden Arbeit in derjenigen Form darstellen, zu welcher man durch Weiterführung der Untersuchungen in A*. § 2 gelangt [8]).

---

[1]) Journ. f. Math. **144** (1914), S. 167—189 (§§ 1—8); **151** (1921), S. 167—199 (§§ 9—13). Diese Arbeit wird hier mit A. bezeichnet.

[2]) Nach A. § 5 wird $A_{10}=\ldots=A_{k-1,0}=0$ angenommen.

[3]) Der Fall $k=1$ ist in A. §§ 1—4 behandelt.

[4]) Journ. f. Math. **144** (1914), S. 187—188.

[5]) Jahresber. d. Dtsch. Math.-Ver. **25** (1916), S. 301—320. Diese Arbeit wird hier mit A*. bezeichnet.

[6]) Jahresber. **25** (1916), S. 315.

[7]) Vgl. die Sätze Journ. f. Math. **151** (1921), S. 177 und S. 198—199.

[8]) Der im 151. Bande (1921) des Journ. f. Math. erschienene zweite Teil (§§ 9—13) von A. ist 1915 und zwar früher als A*. verfaßt und beim Druck nicht geändert worden; nur der früher schon zitierte § 14 (Entwicklung in Fakultätenreihen) ist weggefallen; dieser Gegenstand wird im II. Abschnitt der vorliegenden Arbeit in anderer Weise dargestellt. — Es sei auch auf S. 28—40 der 1920 erschienenen Abhandlung von Malmquist „Sur les points singuliers des équations différentielles,

Daran schließt sich im II. Abschnitt die Entwicklung der bei der Lösung unserer Differentialgleichung auftretenden Laplaceschen Integrale in konvergente Gammaquotienten- und Fakultätenreihen, durch welche die bei der formalen Lösung der Differentialgleichung zunächst auftretenden divergenten Potenzreihen ersetzt werden können [9]).

I.

In A. § 9 ist der Satz aufgestellt [10]):

Die Differentialgleichung (D), welche in dem Sektor

$$\frac{2m\pi-\frac{3\pi}{2}}{k}<\arg x<\frac{2m\pi+\frac{3\pi}{2}}{k} \qquad (m=0,1,\ldots,k-1)$$

die ausgezeichnete Lösung $\eta=\eta_m$ [11]) hat, wird durch die Reihen

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\varphi_n^{(m)} \quad \text{und} \quad y=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\bar{\varphi}_n^{(m)} \qquad (m=0,1,\ldots,k-1)$$

befriedigt, von denen die erste im Sektor

$$\frac{2m\pi+\frac{\pi}{2}}{k}<\arg x<\frac{2m\pi+\frac{3\pi}{2}}{k},$$

die zweite im Sektor

$$\frac{2m\pi-\frac{3\pi}{2}}{k}<\arg x<\frac{2m\pi-\frac{\pi}{2}}{k}$$

in hinreichender Nähe von $x=0$ konvergent ist. Dabei ist

$$\xi=Ce^{\frac{1}{kx^k}-\frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}}-\cdots-\frac{a_{k-1}}{x}}x^{a_k},$$

$$a_1=A_{11},\ a_2=A_{21},\ \ldots,\ a_{k-1}=A_{k-1,1},\ a_k=A_{k1}+2A_{02}A_{k0}$$

und C eine willkürliche Konstante; während $\varphi_0^{(m)}=\bar{\varphi}_0^{(m)}=\eta_m$ ist, sind $\varphi_n^{(m)}$ und $\bar{\varphi}_n^{(m)}$ partikuläre Lösungen der Differentialgleichung $(D^{(n)})$ [12]).

1ter Mémoire" (Arkiv för matematik, astronomi och fysik, **15**, Nr. 3) hingewiesen. — Untersuchungen über Differenzengleichungen, welche den in A. dargestellten Untersuchungen über Differentialgleichungen entsprechen, finden sich in den Arbeiten: „Laplacesche Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen" [Journ. f. Math. **146** (1915), S. 95f.]; „Über eine nichtlineare Differenzengleichung" [Jahresber. d. Dtsch. Math.-Ver. **26** (1917), S. 230f.].

[9]) Es sei hier auf die in Fußnote [16]) (Beginn des II. Abschnitts) enthaltene Berichtigung zur Arbeit des Verf. im 8. Bd. (1920) dieser Zeitschrift hingewiesen.

[10]) Vgl. Malmquist, a. a. O.

[11]) Journ. f. Math. **144** (1914), S. 185—186; Jahresber. **25** (1916), S. 315; Malmquist, a. a. O. S. 29.

[12]) Journ. f. Math. **151** (1921), S. 177; Malmquist, a. a. O. S. 34f.

Es gelten nämlich, wenn man

$$g_1 = \frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta} - 1, \quad g_\mu = \frac{1}{\mu!}\frac{\partial^\mu f(x,\eta)}{\partial \eta^\mu} \qquad (\mu = 2, 3, \ldots)$$

tzt und unter η die erwähnte Lösung η_m versteht, die Differential-eichungen

$$)^{(1)}) \quad x^{k+1}\frac{d\varphi_1}{dx} + (-1 + a_1 x + \ldots + a_k x^k)\varphi_1 = g_1\varphi_1,$$

$$)^{(2)}) \quad x^{k+1}\frac{d\varphi_2}{dx} + 2(-1 + a_1 x + \ldots + a_k x^k)\varphi_2 = g_1\varphi_2 + g_2\varphi_1^2,$$

. . . . . .

$$)^{(n)}) \quad x^{k+1}\frac{d\varphi_n}{dx} + n(-1 + a_1 x + \ldots + a_k x^k)\varphi_n = g_1\varphi_n + H_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1});$$

$_n$ ist eine Summe von Ausdrücken $g_l \varphi_{\nu_1} \ldots \varphi_{\nu_l}$, wo l eine der Zahlen $\ldots, n$ ist und $\nu_1, \ldots, \nu_l$ Zahlen aus der Reihe $1, \ldots, n-1$ mit der mme $\nu_1 + \ldots + \nu_l = n$.

Die Funktion η wurde in A*. in der Form des verallgemeinerten aplaceschen Integrals

$$\eta = \int_0^\infty w(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}} dt$$

rgestellt, wo $w(t)$ der Integralgleichung (J) genügt und die in dem *. S. 315 ausgesprochenen Satze angegebenen Eigenschaften besitzt. Wir ellen jetzt φ_n in der Form

$$\varphi_n = C_{0n} + \int_0^\infty w_n(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}} dt \quad [13]) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

r und untersuchen die Funktion $w_n(t)$.

Nach A*. S. 312 ist im Gebiet $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \varrho$, welches aus den k Flächen-icken $\mathfrak{F}_m$ $(m = 0, 1, \ldots, k-1)$

$$|x| < \sqrt[k]{\frac{\cos(k \arg x - \omega)}{\varrho}}, \qquad \frac{(2m - \frac{1}{2})\pi + \omega}{k} < \arg x < \frac{(2m + \frac{1}{2})\pi + \omega}{k}$$

steht,

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu} x^\lambda = \int_0^\infty G_\mu(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}} dt,$$

$$G_\mu(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{A_{\lambda\mu}\, t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)},$$

[13]) Die in A. und in A*. § 1 mit $w_p(t)$ $(p = 0, 1, \ldots, k-1)$ bezeichneten Funk-nen bezeichnen wir künftig mit $w_{p0}(t)$.

also [14])

$$g_l = A_{0l} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda l} x^\lambda + \sum_{\mu=l+1}^{\infty} \binom{\mu}{l} A_{0\mu} \eta^{\mu-l} + \sum_{\mu=l+1}^{\infty} \binom{\mu}{l} \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda\mu} x^\lambda \eta^{\mu-l}$$

$$= A_{0l} + \int_0^\infty G_l(t) e^{-\frac{t}{x^k}} dt + \sum_{\mu=l+1}^{\infty} \binom{\mu}{l} A_{0\mu} \int_0^\infty w^{\mu-l}(t) e^{-\frac{t}{x^k}} dt$$

$$+ \sum_{\mu=l+1}^{\infty} \binom{\mu}{l} \int_0^\infty G_\mu w^{\mu-l}(t) e^{-\frac{t}{x^k}} dt.$$

Wir setzen

$$Q_l(t) = G_l(t) + \sum_{\mu=l+1}^{\infty} \binom{\mu}{l} A_{0\mu} w^{\mu-l}(t) + \sum_{\mu=l+1}^{\infty} \binom{\mu}{l} G_\mu w^{\mu-l}(t).$$

Die Reihe für $Q_l(t) - G_l(t)$ ist für $|t| \leqq t_0 < \frac{1}{k}$ absolut und gleichmäßig konvergent. Es ist nämlich für $|t| \leqq t_0$

$$|w(t)| \leqq M, \qquad |w^{\mu-l}(t)| \leqq \frac{M|t|^{\mu-l-1}}{(\mu-l-1)!} \qquad (\mu \geqq l+1),$$

$$|G_\mu(t)| \leqq \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{G h^\lambda h'^\mu |t|^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \leqq c h'^\mu |t|^{\frac{1}{k}-1},$$

also

$$|A_{0\mu} w^{\mu-l}(t)| \leqq G M t_0^{-l-1} \cdot \frac{(h' t_0)^\mu}{\Gamma(\mu-l)},$$

$$|G_\mu w^{\mu-l}(t)| \leqq \int_0^{t_0} c h'^\mu |\tau|^{\frac{1}{k}-1} \cdot \frac{M(|t|-|\tau|)^{\mu-l-1}}{(\mu-l-1)!} d|\tau|$$

$$= c M t_0^{\frac{1}{k}-l-1} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \cdot \frac{(h' t_0)^\mu}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+\mu-l\right)}.$$

Demnach ist $t^{1-\frac{1}{k}} Q_l(t)$ eine für $|t| < \frac{1}{k}$ reguläre Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$. Insbesondere ist

$$Q_1(t) = \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{A_{\lambda 1} t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} + A_{k1} + 2 A_{02} C_k + \ldots = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_\lambda t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} + \ldots$$

wegen $a_\lambda = A_{\lambda 1}$ $(\lambda = 1, \ldots, k-1)$, $a_k = A_{k1} + 2 A_{02} A_{k0}$, $C_k = A_{k0}$; wenn man

$$\sum_{\lambda=1}^{k} a_\lambda x^\lambda = \int_0^\infty F(t) e^{-\frac{t}{x^k}} dt, \qquad F(t) = \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{a_\lambda t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}$$

setzt, verschwindet $Q_1(t) - F(t)$ für $t = 0$.

[14]) Vgl. den Satz A*. S. 323–325.

Wir beschränken uns jetzt auf den Sektor

$$(2m-1)\pi+\theta \leqq \arg t \leqq (2m+1)\pi-\theta.$$

$|w(t)| < K e^{\sigma|t|}$ für $\sigma > \varrho$ ist, so hat man nach A. § 1, wenn $\tilde{\sigma} > \sigma$ genommen wird, für $\mu > l$

$$|w^{\mu-l}(t)| < \frac{K^{\mu-l} e^{\tilde{\sigma}|t|}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-l-1}}.$$

ch A*. S. 309 ist

$$|G_\mu(t)| \leqq N \mathfrak{G}_\mu(|t|) < N \mathfrak{H} h'^{\mu} |t|^{\frac{1}{k}-1} e^{h^k|t|}.$$

nn t_0 die oben eingeführte Größe ist, hat man für $|t| > t_0$

$$|G_\mu(t)| < \mathfrak{R} h'^{\mu} e^{h^k|t|} \leqq \mathfrak{R} h'^{\mu} e^{\sigma|t|},$$

hrend wie oben für $|t| \leqq t_0$

$$|G_\mu(t)| \leqq c h'^{\mu} |t|^{\frac{1}{k}-1}$$

$\mathfrak{R}$ und c sind hinreichend große positive Größen. Für $|t| > t_0$ ist

$$|w^{\mu-l}(t)| \leqq \int_0^{t_0} |G_\mu(\tau)| \cdot |w^{\mu-l}(t-\tau)|\, d|\tau| + \int_{t_0}^{|t|} |G_\mu(\tau)| \cdot |w^{\mu-l}(t-\tau)|\, d|\tau|.$$

s erste Integral der rechten Seite ist kleiner als

$$\int_0^{t_0} c h'^{\mu} |\tau|^{\frac{1}{k}-1} \cdot \frac{K^{\mu-l} e^{\tilde{\sigma}(|t|-|\tau|)}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-l}}\, d|\tau| < \frac{c h'^{\mu} K^{\mu-l}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-l}} e^{\tilde{\sigma}|t|} \int_0^{t_0} |\tau|^{\frac{1}{k}-1} d|\tau|$$

$$= \frac{k c h'^{\mu} K^{\mu-l} t_0^{\frac{1}{k}}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-l}} e^{\tilde{\sigma}|t|};$$

zweite Integral ist kleiner als

$$\int_0^{|t|} \mathfrak{R} h'^{\mu} e^{\sigma|\tau|} \cdot \frac{K^{\mu-l} e^{\tilde{\sigma}(|t|-|\tau|)}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-l}}\, d|\tau| < \frac{\mathfrak{R} h'^{\mu} K^{\mu-l}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-l+1}} e^{\tilde{\sigma}|t|}$$

en

$$\int_0^{|t|} e^{-(\tilde{\sigma}-\sigma)|\tau|}\, d|\tau| < \frac{1}{\tilde{\sigma}-\sigma};$$

nach ist für $|t| > t_0$

$$|G_\mu w^{\mu-l}(t)| < \frac{\mathfrak{M} h'^{\mu} K^{\mu-l}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-l}} e^{\tilde{\sigma}|t|}, \qquad \mathfrak{M} = c h t_0^{\frac{1}{k}} + \frac{\mathfrak{R}}{\tilde{\sigma}-\sigma}.$$

Der absolute Betrag von $Q_l(t)$ ist kleiner als

$$\mathfrak{Q}_l(t) = |G_l(t)| + \sum_{\mu=l+1}^{\infty} \binom{\mu}{l} |A_{0\mu}| \cdot |w^{\mu-l}(t)| + \sum_{\mu=l+1}^{\infty} \binom{\mu}{l} |G_\mu w^{\mu-}\ (t)|$$

$$< \mathfrak{K} h'^l e^{\tilde{\sigma}|t|} + \sum_{\mu=l+1}^{\infty} \binom{\mu}{l} G h'^\mu \cdot \frac{K^{\mu-l} e^{\tilde{\sigma}|t|}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-l}} + \sum_{\mu=l+1}^{\infty} \binom{\mu}{l} \frac{\mathfrak{M} h'^\mu K^{\mu-l}}{(\tilde{\sigma}-\sigma)^{\mu-l}} e^{\tilde{\sigma}|t|}$$

$$< \mathfrak{N} h'^l e^{\tilde{\sigma}|t|} \sum_{\mu=l}^{\infty} \binom{\mu}{l} \left(\frac{Kh'}{\tilde{\sigma}-\sigma}\right)^{\mu-l} = L_l e^{\tilde{\sigma}|t|},$$

wobei $\mathfrak{N} \geqq \mathfrak{K} + G + \mathfrak{M}$, ferner

$$\tilde{\sigma} > \sigma + Kh', \quad \zeta = \frac{Kh'}{\tilde{\sigma}-\sigma} < 1, \quad L_l = \frac{\mathfrak{N} h'^l}{(1-\zeta)^{l+1}}$$

sein soll. Wenn wir $\tilde{\varrho} = \varrho + Kh'$ setzen, ist für $|t| > t_0$

$$|Q_l(t)| \leqq \mathfrak{Q}_l(t) < L_l e^{\tilde{\sigma}|t|},$$

wenn $t_0 > 0$ beliebig klein, $\tilde{\sigma}$ beliebig wenig größer als $\tilde{\varrho}$ und L_l hinreichend groß genommen wird.

Demnach ist im Gebiet $\mathfrak{R}\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \tilde{\varrho}$, welches aus den k Flächenstücken $\tilde{\mathfrak{F}}_m$ $(m = 0, 1, \ldots, k-1)$

$$|x| < \sqrt[k]{\frac{\cos(k \arg x - \omega)}{\tilde{\varrho}}}, \qquad \frac{(2m-\frac{1}{2})\pi + \omega}{k} < \arg x < \frac{(2m+\frac{1}{2})\pi + \omega}{k}$$

besteht,

$$g_l = A_{0l} + \int_0^{\infty} Q_l(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt \ ^{15}).$$

Für $l = 1$ hat man g_1, indem man A_{01} durch -1 ersetzt.

Vermittelst der Laplaceschen Transformation

$$\varphi_n = C_{0n} + \int_0^{\infty} w_n(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt$$

gehen aus den Differentialgleichungen für $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ die folgenden Integralgleichungen für $w_1, w_2, \ldots, w_n$ hervor:

$$(\mathrm{J}^{(1)}) \qquad kt\, w_1(t) = \int_0^t (Q_1(t-\tau) - F(t-\tau))\, w_1(\tau)\, d\tau + Q_1(t) - F(t$$

$$(\mathrm{J}^{(2)}) \qquad (kt-1)\, w_2(t) = \int_0^t (Q_1(t-\tau) - 2F(t-\tau))\, w_2(\tau)\, d\tau - 2A_{02} w_1($$

$$- 2Q_2 w_1(t) + A_{02} w_1^2(t) + Q_2 w_1^2(t) + C_{02}(Q_2 - 2F(t)) + Q_2(t$$

. . . . . .

[15]) Nach den im Journ. f. Math. **151** (1921), S. 183 Fußnote angeführten Satz kann g_l statt als Summe von Integralen auch als Integral einer Summe dargestellt werden.

$$^{n)}) \quad (kt-n+1)\,w_n(t) = \int_0^t (Q_1(t-\tau) - nF(t-\tau))\,w_n(\tau)\,d\tau$$
$$+ C_{0n}(Q_1(t) - nF(t)) + \dots .$$

Die Differentialgleichung für $\varphi_n - C_{n0}$ wird durch die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu n} x^\nu$, Integralgleichung $(J^{(n)})$ durch die Reihe

$$w_n(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_{\nu n}\, t^{\frac{\nu}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}$$

mal befriedigt.

Die Integralgleichung $(J^{(1)})$ wird durch sukzessive Näherungen gelöst:

$$kt\,w_1^{(0)}(t) = Q_1(t) - F(t),$$

$$kt\,w_1^{(\nu)}(t) = \int_0^t (Q_1(t-\tau) - F(t-\tau))\,w_1^{(\nu-1)}(\tau)\,d\tau \qquad (\nu = 1, 2, \dots).$$

r $|t| < \frac{1}{k}$ ist $Q_1(t) - F(t)$ gleich dem Produkt aus $t^{\frac{1}{k}}$ und einer Potenz-

he von $t^{\frac{1}{k}}$; folglich ist $w_1^{(0)}(t)$ gleich einer mit $t^{\frac{1}{k}-1}$ multiplizierten

tenzreihe von $t^{\frac{1}{k}}$ und, wie der Schluß von $\nu-1$ auf ν ergibt, $w_1^{(\nu)}(t)$

ich einer mit $t^{\frac{\nu+1}{k}-1}$ multiplizierten Potenzreihe von $t^{\frac{1}{k}}$. Für $(2m-1)\pi$

$\arg t < (2m+1)\pi$ $(m = 0, 1, \dots, k-1)$ sind die Funktionen $w(t)$,

(t) und $w_1^{(\nu)}(t)$ $(\nu = 1, 2, \dots)$ abgesehen von $t = 0$ regulär. Sowohl

$|t| \leqq \frac{1-\varepsilon}{k}$ als auch für $(2m-1)\pi + \theta \leqq \arg t \leqq (2m+1)\pi - \theta$,

$\leqq r$ (r beliebig groß) ist

$$|Q_1(t) - F(t)| \leqq kM\,|t|^{\frac{1}{k}},$$

o

$$|w_1^{(0)}(t)| \leqq M\,|t|^{\frac{1}{k}-1}.$$

rch Schluß von $\nu-1$ auf ν ergibt sich

$$|w_1^{(\nu)}(t)| \leqq \mathfrak{C}_\nu\,|t|^{\frac{\nu+1}{k}-1}, \qquad \mathfrak{C}_\nu = M\,\mathfrak{C}_{\nu-1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{k}+1\right)}.$$

mnach ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} t^{1-\frac{1}{k}} w_1^{(\nu)}(t)$ in dem angegebenen Gebiet der

Ebene absolut und gleichmäßig konvergent und stellt eine in diesem

biet reguläre Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$ dar. Die Funktion

$$w_1(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_1^{(\nu)}(t)$$

mit der für $0 < |t| < \frac{1}{k}$ konvergenten Reihenentwicklung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_{\nu 1} t^{\frac{\nu}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}$$

genügt der Integralgleichung $(J^{(1)})$.

Wendet man die Methode sukzessiver Näherungen auf die Integralgleichungen $(J^{(1)}), \ldots (J^{(n)})$ an, bei denen zu den bereits vorhandenen Singularitäten $t = -\frac{1}{k}$ und $t = 0$ die neuen Singularitäten $t = \frac{1}{k}, \ldots \frac{n-}{k}$ hinzukommen, so findet man, daß $w_n(t)$ das Produkt aus $t^{\frac{1}{k}-1}$ und eine im Kreis $|t| < \frac{1}{k}$ und den beiden Sektoren $(2m-1)\pi < \arg t < 2m\pi$ und $2m\pi < \arg t < (2m+1)\pi$ regulären Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$ ist. Die Reihe

$$w_n(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_{\nu n} t^{\frac{\nu}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)},$$

welche der Integralgleichung $(J^{(n)})$ genügt, ist für $|t| < \frac{1}{k}$ konvergent.

Wenn $\sigma_1 > \tilde{\varrho}$ angenommen wird, ist eine positive Größe K_1 so vorhanden, daß im Sektor

$$(2m-1)\pi + \theta \leqq \arg t \leqq (2m+1)\pi - \theta,$$

welcher $\mathfrak{S}$ heißen möge,

$$|w_1(t)| < K_1 e^{\sigma_1 |t|} \text{ für } |t| > t_0, \quad |w_1(t)| \leqq c_1 |t|^{\frac{1}{k}-1} \text{ für } |t| \leqq t_0$$

ist.

Zum Beweise benutzen wir dieselbe Schlußweise wie in A. § 11. Aus der Integralgleichung $(J^{(1)})$ folgt

$$k|t| \cdot |w_1(t)| \leqq \int_0^{|t|} |Q_1(t-\tau) - F(t-\tau)| \cdot |w_1(\tau)|\, d|\tau| + |Q_1(t) - F(t)|.$$

Im Sektor $\mathfrak{S}$ besteht eine Ungleichung

$$|Q_1(t) - F(t)| < P e^{\sigma |t|}, \quad \tilde{\varrho} < \tilde{\sigma} < \sigma_1.$$

Wir machen die Annahme, es sei $|w_1(t)| = K_1 e^{\sigma_1 |t|}$ für $t = t'$ (t' in $\mathfrak{S}$, $|t'|$ hinreichend groß), aber $|w_1(t)| \leqq K_1 e^{\sigma_1 |t|}$ für $t_0 \leqq |t| \leqq |t'|$, $|w_1(t)| \leqq c_1 |t|^{\frac{1}{k}-1}$ für $|t| < t_0$ (und zwar alle t von $\mathfrak{S}$, welche diese Bedingungen erfüllen). Unter dieser Annahme ist für $t = t'$

$$k|t| \cdot K_1 e^{\sigma_1 |t|} \leqq \int_0^{|t|} P e^{\tilde{\sigma}(|t|-|\tau|)} \cdot K_1 e^{\sigma_1 |\tau|}\, d|\tau| + \int_0^{t_0} P e^{\tilde{\sigma}(|t|-|\tau|)} \cdot c_1 |\tau|^{\frac{1}{k}-1}\, d|\tau| + P e^{\tilde{\sigma}|}$$

as erste Glied der rechten Seite ist

$$P K_1 e^{\tilde{\sigma}|t|} \int_0^{|t|} e^{(\sigma_1-\tilde{\sigma})|\tau|} d|\tau| < \frac{P K_1 e^{\sigma_1|t|}}{\sigma_1-\tilde{\sigma}},$$

as zweite Glied ist

$$P c_1 e^{\tilde{\sigma}|t|} \int_0^{t_0} e^{-\tilde{\sigma}|\tau|} |\tau|^{\frac{1}{k}-1} d|\tau| = \mathfrak{C} e^{\sigma|t|} \qquad (\mathfrak{C} \text{ konstant}).$$

ir haben demnach nach Division mit $K_1 e^{\sigma_1|t|}$ die Ungleichung

$$k|t| \leqq \frac{P}{\sigma_1-\tilde{\sigma}} + (\mathfrak{C}+P) e^{-(\sigma_1-\tilde{\sigma})|t|},$$

daß für hinreichend große $|t|$ ein Widerspruch vorhanden ist.

Durch dieselbe Schlußweise ergeben sich die in den Sektoren

$$(2m-1)\pi + \theta \leqq \arg t \leqq 2m\pi - \theta$$

d

$$2m\pi + \theta \leqq \arg t \leqq (2m+1)\pi - \theta$$

ltigen Ungleichungen

$$|w_n(t)| < K_n e^{\sigma_n|t|} \text{ für } |t| > t_0, \qquad |w_n(t)| \leqq c_n |t|^{\frac{1}{k}-1} \text{ für } |t| \leqq t_0,$$

$\sigma_n > \tilde{\varrho}$ ist.

Die Laplaceschen Integrale

$$\varphi_n = C_{0n} + \int_0^{\infty} w_n(t) e^{-\frac{t}{x^k}} dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

it dem Integrationsweg $\arg t = 2m\pi + \omega$, wo $0 < \omega < \pi$ oder $-\pi < \omega < 0$ n Falle $n = 1$ $-\pi < \omega < \pi$) ist, konvergieren demnach in dem Gebiet $\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) < \tilde{\varrho}$, welches aus den k Flächenstücken

$$|x| < \sqrt{\frac{\cos(k \arg x - \omega)}{\tilde{\varrho}}}, \qquad \frac{(2m-\frac{1}{2})\pi + \omega}{k} < \arg x < \frac{(2m+\frac{1}{2})\pi - \omega}{k}$$

steht. Daß das Integral φ_n der Differentialgleichung $(D^{(n)})$ genügt, er- nnt man wie in A*. S. 312—314.

Wir sprechen den Satz aus:

Die Integralgleichung $(J^{(n)})$ *wird durch eine Funktion* $w_n(t)$ *be- edigt, welche sich sowohl für* $|t| < \frac{1}{k}$ *als auch für* $(2m-1)\pi < \arg t$ $2m\pi$ *und für* $2m\pi < \arg t < (2m+1)\pi$ (*im Falle* $n = 1$ *für* $(2m-1)\pi$ $\arg t < (2m+1)\pi$) *regulär verhält. Für* $0 < |t| < \frac{1}{k}$ *gilt die kon- rgente Reihenentwicklung*

$$w_n(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_{\nu n} t^{\frac{\nu}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)},$$

während die Differentialgleichung $(D^{(n)})$ *für* φ_n *durch die im allgemeinen divergente Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu n} x^{\nu}$$

befriedigt wird. In den Sektoren $(2m-1)\pi+\theta \leqq \arg t \leqq 2m\pi-\theta$ *und* $2m\pi+\theta \leqq \arg t \leqq (2m+1)\pi-\theta$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ [*im Falle* $n=1$ *im Sektor* $(2m-1)\pi+\theta \leqq \arg t \leqq (2m+1)\pi-\theta$] *ist*

$$|w_n(t)| < K_n e^{\sigma_n |t|} \quad \text{für} \quad |t| > t_0, \qquad |w_n(t)| \leqq c_n |t|^{\frac{1}{k}-1} \quad \text{für} \quad |t| \leqq t_0;$$

hierbei ist $\sigma_n > \tilde{\varrho}$ *hinreichend groß,* $t_0 > 0$ *beliebig,* K_n *und* c_n *hinreichend groß. Das über die Gerade* $\arg t = 2m\pi+\omega$ *erstreckte Laplacesche Integral*

$$\varphi_n = C_{0n} + \int_0^{\infty} w_n(t) e^{-\frac{t}{x^k}} dt$$

stellt in dem Gebiet

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \tilde{\varrho}, \qquad \frac{(2m-\frac{1}{2})\pi+\omega}{k} < \arg x < \frac{(2m+\frac{1}{2})\pi+\omega}{k}$$

eine Lösung $\varphi_n^{(m)}$ *der Differentialgleichung* $(D^{(n)})$ *dar, wenn* $0<\omega<\pi$, *eine Lösung* $\bar{\varphi}_n^{(m)}$, *wenn* $-\pi<\omega<0$ *ist. Im Falle* $n=1$ *hat man die Lösung* $\varphi_1^{(m)} = \bar{\varphi}_1^{(m)}$, *wenn* $-\pi<\omega<\pi$ *ist.*

II.[16])

Wir wollen die Funktion

$$\varphi_n = C_{0n} + \int_0^{\infty} w_n(t) e^{-\frac{t}{x^k}} dt$$

---

[16]) Vgl. „Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen" [Math. Ann. 71 (1911), S. 510f.]; § 4 der Arbeit „Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen" [Jahresber. d. Dtsch. Math.-Ver. 24 (1915), S. 309f.]; § 2 der Arbeit „Laplacesche Integrale und Gamma-quotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen und Volterraschen Integralgleichungen" [Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 100f.].

In der zuletzt genannten Arbeit ist ein aus der dort angeführten Abhandlung von F. Nevanlinna übernommener Fehler enthalten. Die Ungleichung in Zeile 14, S. 110 des 8. Bandes dieser Zeitschr. setzt nämlich voraus, daß

$$\binom{\alpha+\nu-2}{\nu} = \frac{(\alpha+\nu-1)\ldots(\alpha-1)}{\nu!} > 0,$$

also $\alpha>1$ ist. Diese Schwierigkeit fällt fort, wenn man statt von der Funktion $v(z)$ von der Ableitung $\frac{dv(z)}{dz}$ ausgeht, wie ich es früher [Jahresber. d. Dtsch. Math.-Ver. 24 (1915), S. 326/7] schon getan habe, um den Satz H der Abhandlung von Nörlund

eine Gammaquotientenreihe entwickeln. Für $n = 0$ haben wir $\varphi_0 = \eta$, nn $w_0(t) = w(t)$ gesetzt wird. Für $|t| < \frac{1}{k}$ ist

$$w_n(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_{\nu n}\, t^{\frac{\nu}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)};$$

ist $C_{00} = C_{10} = \ldots = C_{k-1,0} = 0$, $C_{\nu 0} = C_\nu$ $(\nu \geqq k)$. Um den Wert von (t) für $\arg t = 2m\pi + \omega$ zu erhalten, setzen wir unter Anwendung der zeichnung $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{k}}$

$$w_n(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_{\nu n}\, \alpha^{m\nu}\, t^{\frac{\nu}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}$$

t $\arg t = \omega$. Wir benutzen die Substitution

$$t = -\frac{1}{x}\log z, \qquad z = e^{-xt},$$

bei der absolute Betrag γ von $x = \gamma e^{-i\omega}$ hinreichend groß zu nehmen Durch die Substitution $z = e^{-t}$ wird der Kreis $|z-1| = 1$ in die irve $\mathfrak{C}$ der t-Ebene übergeführt, welche ein Gebiet $\mathfrak{G}$ einschließt [17]). e Kurve $\mathfrak{C}$ geht durch die Substitution $t = \gamma e^{-i\omega} t$ in eine Kurve C t-Ebene über, welche ein Gebiet G abgrenzt, das bei hinreichend ßem γ sich beliebig eng an die Halbgerade $\arg t = \omega$ anschließt. Es ω weder gleich Null noch gleich π; γ sei so groß, daß keine der llen $t = \pm\frac{1}{k}$ in das Gebiet G oder, was auf dasselbe hinauskommt, ne der Stellen $t = \pm\frac{\gamma}{k} e^{-i\omega}$ in das Gebiet $\mathfrak{G}$ fällt. Denn innerhalb Kreises $|t| = \frac{1}{k}$ abgesehen vom Mittelpunkt $t = 0$ und außerhalb der raden $\arg t = 0$ und $\arg t = \pi$ verhalten sich die Funktionen $w_n(t)$ ulär. Da die Funktionen $w_0(t)$ und $w_1(t)$ auch auf der Geraden $\arg t = 0$ ulär sind, so braucht man, soweit es sich um die Funktionen $\varphi_0 = \eta$ d φ_1 handelt, nur den Integrationsweg $\arg t = \pi$ auszuschließen und nur auszusetzen, daß die Stelle $t = -\frac{1}{k}$ nicht in das Gebiet G oder die

---

r les séries de facultés" im 37. Bd. (1914) der Act. math. benutzen zu können, und es im folgenden geschieht, wo nach dem Vorgang von Nevanlinna der von damard eingeführte Begriff der Ordnung einer Potenzreihe auf dem Konvergenz- is nicht benutzt wird.

[17]) Vgl. die Figur Math. Ann. 71 (1911), S. 515.

Stelle $t = \frac{\nu}{k} e^{i(\pi-\omega)}$ nicht in das Gebiet $\mathfrak{G}$ fällt. Unter den gemachten Voraussetzungen ist die Funktion

$$v_n(z) = w_n\left(-\frac{1}{\varkappa}\log z\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_n^{(\nu)} \alpha^{m\nu} (1-z)^{\frac{\nu}{k}-1}$$

innerhalb des Kreises $|z-1| = 1$ abgesehen vom Mittelpunkt $z = 1$ regulär. Das über die Gerade $\arg t = \omega$ erstreckte Integral φ_n, welches im Gebiet $\tilde{\mathfrak{F}}_m$ (für $n = 0$ im Gebiet $\mathfrak{F}_m$) konvergiert, geht, wenn

$$\frac{1}{\varkappa x^k} = \Xi$$

gesetzt wird, in

$$\varphi_n = C_{0n} + \frac{1}{\varkappa}\int_0^1 v_n(z)\, z^{\Xi-1}\, dz$$

mit geradlinigem Integrationsweg über. Wenn man nach Einsetzung der Reihe für $v_n(z)$ gliedweise integriert, erhält man

$$\varphi_n = C_{0n} + \frac{1}{\varkappa}\sum_{\nu=1}^{\infty} B_n^{(\nu)} \alpha^{m\nu} \int_0^1 (1-z)^{\frac{\nu}{k}-1} z^{\Xi-1}\, dz$$

$$= C_{0n} + \frac{1}{\varkappa}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_n^{(\nu)} \alpha^{m\nu}\, \Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)\Gamma(\Xi)}{\Gamma\left(\Xi+\frac{\nu}{k}\right)}.$$

Um die Zulässigkeit der gliedweisen Integration zu beweisen, untersuchen wir das Verhalten von $B_n^{(\nu)}$ für große ν.

Wir benutzen zu diesem Zweck die Funktion

$$v_n'(z) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{k}-1\right) B_n^{(\nu)} \alpha^{m\nu} (1-z)^{\frac{\nu}{k}-2} = -\frac{1}{\varkappa z}\frac{dw_n(t)}{dt}.$$

Wenn $0 < \theta < \theta' < \frac{\pi}{2}$ und

(1) $$(2m-1)\pi + \theta' \leqq \arg t \leqq 2m\pi - \theta'$$

oder

(2) $$2m\pi + \theta' \leqq \arg t \leqq (2m+1)\pi - \theta'$$

ist[18]) und wenn $\tau > 0$, $\delta > 0$ und K_n' hinreichend groß angenommen wird, ist für $|t| > \tau$

$$\left|\frac{dw_n(t)}{dt}\right| < K_n' e^{(\tilde{\varrho}+\delta)|t|}.$$

[18]) Für $n = 0$ und $n = 1$ soll

(3) $$(2m-1)\pi + \theta' \leqq \arg t \leqq (2m+1) - \theta'$$

sein; im Falle $n = 0$ ist im folgenden $\tilde{\varrho}$ durch ϱ zu ersetzen.

ese Ungleichung gilt im Sektor S

$$\omega - \Delta \leqq \arg t \leqq \omega + \Delta,$$

nn dieser einem der Sektoren (1), (2), (3) angehört. Wenn man $= \varkappa t = \gamma e^{-i\omega} t$ setzt, ist für $-\Delta \leqq \arg t \leqq \Delta$, $|t| > \gamma\tau$

$$\left|\frac{d w_n(t)}{dt}\right| < K_n' e^{\frac{\tilde{\varrho}+\delta}{\gamma}|t|} \leqq K_n' e^{\frac{(\tilde{\varrho}+\delta)\,\Re(t)}{\gamma \cos \Delta}}$$

gen

$$|t| = \frac{\Re(t)}{\cos \arg t} \leqq \frac{\Re(t)}{\cos \Delta}.$$

$z = e^{-t}$, $|z| = e^{-\Re(t)}$ ist, hat man in dem Gebiet der z-Ebene, welches n Sektor S der t-Ebene entspricht,

$$|v_n'(z)| = \frac{1}{\gamma |z|} K_n' |z|^{-\frac{\tilde{\varrho}+\delta}{\gamma \cos \Delta}} = \frac{1}{\gamma} K_n' |z|^{-\frac{\tilde{\varrho}}{\gamma} - \varepsilon - 1},$$

ε beliebig klein angenommen werden kann. Der Ringfläche $0 < \zeta$ $|1 - z| \leqq 1$ der z-Ebene entspricht das Gebiet G' der t-Ebene, welches s dem Gebiet G durch Ausschluß eines Gebietes entsteht, welches den nkt $t = 0$ in seinem Innern enthält. In demjenigen Teil des Gebietes G', lcher außerhalb des Sektors S liegt, ist $0 < \tau < |t| < T$ (T endlich), o $\frac{d w_n(t)}{dt}$ und damit $v_n'(z)$ endlich. Es gilt also in der Ringfläche $< \zeta < |1 - z| \leqq 1$ eine Ungleichung

$$|v_n'(z)| < D_n' |z|^{-\frac{\tilde{\varrho}}{\gamma} - \varepsilon - 1},$$

$\varepsilon > 0$ beliebig klein und D_n' hinreichend groß ist.

Die Funktion

$$\psi(z) = z^{\frac{\tilde{\varrho}}{\gamma} + 2\varepsilon} (1 - z)^{2 - \frac{1}{k}} v_n'(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu (1 - z)^{\frac{\nu}{k}}$$

eine für $|1 - z| < 1$ reguläre Funktion von $(1 - z)^{\frac{1}{k}}$. Für $\zeta < |1 - z| \leqq 1$ ist

$$|\psi(z)| < D_n' |z|^{\varepsilon - 1};$$

$|1 - z| \leqq \zeta$ hat man, wenn H eine endliche Zahl bedeutet,

$$|\psi(z)| \leqq H \leqq H \left(\frac{1 + \zeta}{|z|}\right)^{1-\varepsilon} = H (1 + \zeta)^{1-\varepsilon} \cdot |z|^{\varepsilon - 1}.$$

mnach gilt in dem ganzen Kreise $|1 - z| \leqq 1$ eine Ungleichung

$$|\psi(z)| \leqq Q |z|^{\varepsilon - 1}.$$

Wir setzen $(1 - z)^{\frac{1}{k}} = u$. Die Funktion

$$\chi(u) = \psi(1 - u^k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu u^\nu$$

ist für $|u| \leqq 1$ mit Ausnahme der Punkte $u = e^{\frac{2\pi i \lambda}{k}}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, k-1)$ regulär; man hat

$$C_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi(e^{i\vartheta})\, e^{-\nu i \vartheta}\, d\vartheta, \qquad |C_\nu| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\chi(e^{i\vartheta})|\, d\vartheta$$

oder, da

$$|\chi(e^{i\vartheta})| = |\psi(1 - e^{ik\vartheta})| \leqq Q\,|1 - e^{ik\vartheta}|^{\varepsilon-1} = Q \left|2 \sin \frac{k\vartheta}{2}\right|^{\varepsilon-1}$$

ist,

$$|C_\nu| \leqq \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|2 \sin \frac{k\vartheta}{2}\right|^{\varepsilon-1} d\vartheta = C,$$

wo C eine von ν unabhängige endliche Größe ist[19]).

[19]) Zunächst ist

$$C_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\chi(u)\, du}{u^{\nu+1}},$$

wobei über den Kreis $|u| = 1$ unter Umgehung der singulären Punkte $e^{\frac{2\pi i \lambda}{k}}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, k-1)$ integriert wird, oder

$$C_\nu = -\frac{1}{2\pi k i} \int \frac{\psi(z)\, dz}{(1-z)^{\frac{\nu}{k}+1}},$$

wobei der Kreis $|1 - z| = 1$ k-mal durchlaufen, aber jedesmal der durch den Punkt $z = 0$ halbierte Bogen dieses Kreises mit dem kleinen Zentriwinkel $2\vartheta_0$ durch die zugehörige Sehne ersetzt wird. Diese Sehne enthält die Punkte $z = 1 - \cos\vartheta_0 + i \sin\vartheta$, $\vartheta = -\vartheta_0 \ldots \vartheta_0$, für welche

$$|\psi(z)| \leqq \frac{Q}{|z|^{1-\varepsilon}}, \qquad |1 - z| \geqq \cos\vartheta_0$$

ist. Das über die Sehne erstreckte Integral

$$\int \frac{\psi(z)\, dz}{(1-z)^{\frac{\nu}{k}+1}}$$

ist dem absoluten Betrage nach höchstens gleich

$$\frac{Q}{(\cos\vartheta_0)^{\frac{\nu}{k}+1}} \int \frac{|dz|}{|z|^{1-\varepsilon}},$$

wo $|dz|$ ein Element der Sehne ist. Dem Punkte z der Sehne ordnen wir den Punkt z' des zugehörigen Kreisbogens mit derselben Ordinate $\sin\vartheta$ zu, so daß $|dz'|$ das Element des Bogens ist, welches dem Element $|dz|$ der Sehne entspricht. Wegen $|dz| \leqq |dz'|$, $|z| \geqq |z'|$ ist das über die Sehne erstreckte Integral

$$\int \frac{|dz|}{|z|^{1-\varepsilon}}$$

(Fortsetzung der Fußnote 19 auf der nächsten Seite.)

Wenn $\beta = \frac{\tilde{\varrho}}{\gamma} + 2\varepsilon + 1$ gesetzt wird, ist für $|1-z|<1$

$$z^{-\frac{\tilde{\varrho}}{\gamma}-2\varepsilon} = (1-(1-z))^{1-\beta} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\binom{\beta+\lambda-2}{\lambda}(1-z)^{\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(\beta+\lambda-2)\ldots\beta(\beta-1)}{1\cdot 2\ldots\lambda}(1-z)^{\lambda};$$

gen $\beta > 1$ sind die Koeffizienten dieser Reihe *positiv*. Die Gleichung

$$(1-z)^{2-\frac{1}{k}} v_n'(z) = z^{-\frac{\tilde{\varrho}}{\gamma}-2\varepsilon}\psi(z)$$

reibt sich

$$-\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu+1}{k}-1\right)B_n^{(\nu+1)}\alpha^{m(\nu+1)}u^{\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\binom{\beta+\lambda-2}{\lambda}u^{\lambda k}\cdot\sum_{\mu=0}^{\infty}C_{\mu}u^{\mu};$$

rch Koeffizientenvergleichung ergibt sich

$$-\left(\frac{\nu+1}{k}-1\right)B_n^{(\nu+1)}\alpha^{m(\nu+1)}u^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{\nu}{k}\right]}\binom{\beta+\lambda-2}{\lambda}C_{\nu-\lambda k},$$

$\left[\frac{\nu}{k}\right]$ die größte ganze Zahl bedeutet, welche $\leqq \frac{\nu}{k}$ ist,

$$\left|\frac{\nu+1}{k}-1\right|\cdot|B_n^{(\nu+1)}| \leqq C\sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{\nu}{k}\right]}\binom{\beta+\lambda-2}{\lambda} = C\binom{\beta+\left[\frac{\nu}{k}\right]-1}{\left[\frac{\nu}{k}\right]}$$

$$= C\frac{\Gamma\left(\beta+\left[\frac{\nu}{k}\right]\right)}{\Gamma\left(1+\left[\frac{\nu}{k}\right]\right)\Gamma(\beta)} \leqq C\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{\nu}{k}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{k}\right)\Gamma(\beta)}\ ^{20)}.$$

raus folgt

$$|B_n^{(\nu)}| \leqq \frac{C(1+\delta')}{\Gamma\left(\frac{\tilde{\varrho}}{\gamma}+2\varepsilon+1\right)}\cdot\left(\frac{\nu}{k}\right)^{\frac{\tilde{\varrho}}{\gamma}+2\varepsilon-1}, \quad \lim_{\nu=\infty}\delta' = 0.$$

---

chstens gleich dem über den Bogen erstreckten Integral

$$\int\frac{|dz'|}{|z'|^{1-\varepsilon}},$$

lches sich mit ϑ_0 der Null nähert. Demnach kann das Integral für C_ν über den mal durchlaufenen Kreis $|1-z|=1$ oder über den Kreis $|u|=1$ erstreckt werden.

[20]) Die Funktion

$$\frac{\Gamma(\beta+x)}{\Gamma(1+x)}$$

nmt mit wachsendem $x \geqq 0$ zu, denn ihr Differentialquotient ist positiv, weil

$$\frac{\Gamma'(\beta+x)}{\Gamma(\beta+x)} > \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}$$

Wenn $\Re(\Xi) > 0$ ist, ist

$$\int_0^1 (1-z)^{\frac{\nu}{k}-1} z^{\Re(\Xi)-1}\, dz = \frac{\Gamma(\Re(\Xi))\,\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}{\Gamma\left(\Re(\Xi)+\frac{\nu}{k}\right)} = \Gamma(\Re(\Xi))\cdot\left(\frac{\nu}{k}\right)^{-\Re(\Xi)}\cdot(1+\delta'')$$

$$\lim_{\nu=\infty} \delta'' = 0,$$

also

$$|B_n^{(\nu)}| \int_0^1 |(1-z)^{\frac{\nu}{k}-1} z^{\Xi-1}|\, dz = \frac{C\Gamma(\Re(\Xi))\cdot(1+\delta)}{\Gamma\left(\frac{\tilde{\varrho}}{\gamma}+2\varepsilon+1\right)}\cdot\left(\frac{\nu}{k}\right)^{\frac{\tilde{\varrho}}{\gamma}-\Re(\Xi)+2\varepsilon-1}, \quad \lim_{\nu=\infty}\delta=0$$

Daher ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |B_n^{(\nu)}| \int_0^1 |(1-z)^{\frac{\nu}{k}-1} z^{\Xi-1}\, dz|$$

konvergent, wenn $\frac{\tilde{\varrho}}{\gamma} - \Re(\Xi) + 2\varepsilon < 0$, d. h. wenn

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \tilde{\varrho}$$

ist. Dann ist aber die oben ausgeführte gliedweise Integration zulässig.

Die oben aufgestellte Gammaquotientenreihe ist im Gebiet $\mathfrak{F}_m$ konvergent und stellt die Funktion $\varphi_n^{(m)}$ oder $\bar{\varphi}_n^{(m)}$ dar, je nachdem $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2} < \omega < 0$ ist. Für $n = 0$ und $n = 1$ erhält man die einzige Funktion $\varphi_n^{(m)} = \bar{\varphi}_n^{(m)}$, wenn man $-\pi < \omega < \pi$ annimmt. Im Falle $n = 0$, in welchem $\tilde{\varrho}$ durch ϱ zu ersetzen ist, hat man die im Gebiet $\mathfrak{F}_m$ konvergente Reihe

$$\eta_m = \frac{1}{x}\sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{B^{(\nu)}\alpha^{m\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)\Gamma(\Xi)}{\Gamma\left(\Xi+\frac{\nu}{k}\right)}.$$

Im Falle $k = 1$ gehen die Gammaquotientenreihen in Fakultätenreihen über, welche in der Halbebene $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \tilde{\varrho}$ (für $n = 0$ in der Halbebene $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \varrho$) konvergent sind:

$$\varphi_n = C_{0n} + \frac{1}{x}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu-1)!\,B_n^{(\nu)}}{\frac{1}{xx}\left(\frac{1}{xx}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{xx}+\nu-1\right)} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\eta = \frac{1}{x}\sum_{\nu-1}^{\infty} \frac{(\nu-1)!\,B^{(\nu)}}{\frac{1}{xx}\left(\frac{1}{xx}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{xx}+\nu-1\right)}.$$

Reihe φ_n $(n = 2, 3, \ldots)$ stellt die Funktionen φ_n oder $\bar{\varphi}_n$ dar, je
ıdem $0 < \omega < \pi$ oder $-\pi < \omega < 0$ ist.

Um auch im Falle $k > 1$ Reihen zu erhalten, deren Glieder rationale
ktionen von x sind, benutzen wir die in A. § 7 und § 12 aufgestellten
drücke

$$\varphi_n = \sum_{p=0}^{k-1} C_{pn} x^p + \sum_{p=0}^{k-1} x^p \int_0^\infty w_{pn}(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}} dt.$$

ei ist $\varphi_0 = \eta$ und $C_{p0} = 0$ $(p = 0, 1, \ldots, k-1)$. Der Integrations-
ist die Gerade $\arg t = \omega$ und zwar ist $0 < \omega < \pi$ oder $-\pi < \omega < 0$
$< \omega < \pi$ für $n = 0$ und $n = 1$).

Wollen wir im Falle $k > 1$ von A. keinen Gebrauch machen, sondern
A*. benutzen, so stellen wir den Zusammenhang zwischen den Funk-
en $w_n(t)$ und $w_{pn}(t)$ nach dem Muster von A*. § 1 in der Form dar:

$$w_n(t) = \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{C_{\lambda n} t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{k}\right)} \int_0^t (t-\tau)^{\frac{p}{k}-1} w_{pn}(\tau)\, d\tau;$$

$$w_{0n}(t) = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \left[w_n(t) - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{C_{\lambda n} t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \right]_m,$$

$$w_{pn}(t) = \frac{\sin\frac{p\pi}{k}}{\pi} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{p}{k}} \frac{df_p(\tau)}{d\tau} d\tau \qquad (p = 1, \ldots, k-1),$$

$$f_p(t) = \frac{1}{k} \Gamma\left(\frac{p}{k}\right) \sum_{m=0}^{k-1} \alpha^{-mp} \left[w_n(t) - \sum_{\lambda=1}^{p-1} \frac{C_{\lambda n} t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \right]_m;$$

ist $[\ ]_m$ der Wert der in der Klammer stehenden Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$
en Fall, daß $\arg t$ zwischen $(2m-1)\pi$ und $(2m+1)\pi$ angenommen
[1]). Hiernach folgen die in A. §§ 12—13 hergeleiteten Eigenschaften der
tionen $w_{pn}(t)$ aus denjenigen der hier betrachteten Funktionen $w_n(t)$.

---

[1]) Vgl. A*. S. 306—307. Die dortigen Formeln gelten auch hier bei Ersetzung
(t), $w_p(t)$ durch

$$w_n(t) - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{C_{\lambda n} t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}, \qquad w_{pn}(t).$$

Wir wollen die in dem Ausdruck für φ_n enthaltene Funktion

$$\int_0^\infty w_{pn}(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}} dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

in eine Fakultätenreihe entwickeln. Für $|t| < \frac{1}{k}$ ist

$$w_{pn}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{p+\nu k, n} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!};$$

dabei ist $C_{p+\nu k, 0} = C_{p+\nu k}$. Wenn γ wie oben hinreichend groß gewählt wird, ist die Reihe

$$v_{pn}(z) = w_{pn}\left(-\frac{1}{x}\log z\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{pn}^{(\nu)} (1-z)^{\nu-1}$$

für $|1-z| < 1$ konvergent. Durch die Substitution

$$t = -\frac{1}{x}\log z, \qquad z = e^{-xt}$$

erhält man, wenn wieder $\Xi = \frac{1}{x\, x^k}$ gesetzt wird,

$$\int_0^\infty w_{pn}(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}} dt = \frac{1}{x}\int_0^1 v_{pn}(z)\, z^{\Xi-1} dz$$

und hieraus durch Einsetzung der Reihe für $v_{pn}(z)$ und gliedweise Integration

$$\int_0^\infty w_{pn}(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}} dt = \frac{1}{x}\sum_{\nu=1}^{\infty} B_{pn}^{(\nu)} \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\Xi)}{\Gamma(\Xi+\nu)} = \frac{1}{x}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu-1)!\, B_{pn}^{(\nu)}}{\Xi(\Xi+1)\ldots(\Xi+\nu-1)}.$$

Wie oben beweist man die Gültigkeit dieser Gleichung in dem Gebiet $\Re(\Xi) > \frac{\tilde{\varrho}}{\gamma}$ oder $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \tilde{\varrho}$, wobei im Falle $n = 0$ $\tilde{\varrho}$ durch ϱ ersetzt wird.

Demnach ist in dem angegebenen Gebiet

$$\varphi_n = \sum_{p=0}^{k-1} C_{pn} x^p + \frac{1}{x}\sum_{p=0}^{k-1} x^p \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu-1)!\, B_p^{(\nu)}}{\Xi(\Xi+1)\ldots(\Xi+\nu-1)}.$$

In dem Gebiet

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \tilde{\varrho}, \qquad \frac{2m\pi - \frac{\pi}{2} + \omega}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi + \frac{\pi}{2} + \omega}{k}$$

stellt die Reihe φ_n im Falle $0 < \omega < \pi$ die Funktion $\varphi_n^{(m)}$, im Falle $-\pi < \omega < 0$ die Funktion $\bar{\varphi}^{(m)}$ dar.

Wir können den Satz aussprechen:

Wenn der absolute Betrag γ von $x = \gamma e^{-i\omega}$ hinreichend groß genommen wird, ist

$$= \frac{1}{x}\sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{B^{(\nu)}\alpha^{m\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa x^k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa x^k}+\frac{\nu}{k}\right)} = \frac{1}{x}\sum_{p=0}^{k-1} x^p \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu-1)!\, B_{p0}^{(\nu)}}{\frac{1}{\varkappa x^k}\left(\frac{1}{\varkappa x^k}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{\varkappa x^k}+\nu-1\right)}$$

Gebiet

$$\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \varrho, \qquad \frac{2m\pi-\frac{\pi}{2}+\omega}{k} < \arg x < \frac{2m\pi+\frac{\pi}{2}+\omega}{k}, \qquad -\pi < \omega < \pi;$$

Reihe

$$\varphi_n = C_{0n} + \frac{1}{x}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_n^{(\nu)}\alpha^{m\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa x^k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\varkappa x^k}+\frac{\nu}{k}\right)}$$

$$= \sum_{p=0}^{k-1} C_{pn}x^p + \frac{1}{x}\sum_{p=0}^{k-1} x^p \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu-1)!\, B_{pn}^{(\nu)}}{\frac{1}{\varkappa x^k}\left(\frac{1}{\varkappa x^k}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{\varkappa x^k}+\nu-1\right)}$$

lt im Gebiet

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \tilde{\varrho}, \qquad \frac{2m\pi-\frac{\pi}{2}+\omega}{k} < \arg x < \frac{2m\pi+\frac{\pi}{2}+\omega}{k}$$

Funktion $\varphi_n^{(m)}$ oder die Funktion $\bar{\varphi}_n^{(m)}$ dar, je nachdem $0 < \omega < \pi$ $-\pi < \omega < 0$ ist. Im Falle $n = 1$ hat man eine Funktion $\varphi_1^{(m)} = \bar{\varphi}_1^{(m)}$ $-\pi < \omega < \pi$. Die in den angeschriebenen Formeln enthaltenen nmaquotienten- und Fakultätenreihen sind in den angegebenen Gen absolut konvergent.

Um zu beweisen, daß die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_m \sim \sum_{\nu=k}^{\infty} C_\nu x^\nu, \qquad \varphi_1^{(m)} \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu n} x^\nu$$

für $\dfrac{2m\pi-\frac{3\pi}{2}}{k} < \arg x < \dfrac{2m\pi+\frac{3\pi}{2}}{k}$,

asymptotische Gleichung

$$\varphi_n^{(m)} \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu n} x^\nu \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

für $\dfrac{2m\pi-\frac{\pi}{2}}{k} < \arg x < \dfrac{2m\pi+\frac{3\pi}{2}}{k}$

und die asymptotische Gleichung

$$\bar{\varphi}_n^{(m)} \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu n} x^{\nu}$$

$$\text{für} \quad \frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2}}{k} < \arg x < \frac{2m\pi + \frac{\pi}{2}}{k}$$

gilt, verwenden wir wieder die Integraldarstellungen von η und φ_n durch die Funktionen $w_{p0}(t)$ und $w_{pn}(t)$; nachdem deren Eigenschaften aus denjenigen der jetzt benutzten Funktionen $w(t)$ und $w_n(t)$ hergeleitet sind, ist wie in A. § 11 und § 13 zu verfahren.

(Eingegangen am 1. August 1921.)

Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion.

(Dritte Mitteilung)[1]).

Die Funktionalgleichung der L-Reihen.

Von

Hans Hamburger in Berlin.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

§ 1. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Koeffizienten von Dirichletschen Reihen, die einer der beiden Funktionalgleichungen genügen.

§ 2. Die Anzahl der linear unabhängigen Dirichletschen Reihen, die den Funktionalgleichungen genügen.

§ 3. Neuer Beweis für die Funktionalgleichung der L-Reihen.

§ 4. Konstruktion neuer Lösungen der Funktionalgleichungen.

§ 5. Bestimmung der Anzahl der voneinander verschiedenen Lösungen.

§ 6. Die lineare Unabhängigkeit der k Lösungen; vorbereitende Betrachtungen.

§ 7. Fortsetzung von § 6; Beweis von Lemma IV.

1. Es bezeichne $f(s)$ eine für alle Werte der komplexen Veränder- $n\ s = \sigma + it$ definierte analytische Funktion mit den drei Eigenschaften:

a) *$f(s)$ besitze im Endlichen höchstens endlich viele Pole beliebiger* $nung$.

---

[1]) Vgl. die erste und zweite Mitteilung des Verfassers gleichen Titels Math. Zeitschr. 921) S. 240—254 und 11 (1922) S. 224—245 (im folgenden kurz 1. Mtlg. und lg. zitiert) und dessen vorläufige Mitteilung: Über die Funtionalgleichung der eihen in den Sitzber. der Berl. Math. Ges. XX. Jahrgang (1920) S. 10—13. Die Überlegungen der vorliegenden Mitteilung stützen sich auf die in den Sätzen 3 4, 6 und 7 (2. Mtlg.) formulierten Resultate, während Beweismethoden und Beweis- l der vorhergehenden Mitteilungen hier nicht benutzt werden.

b) *Es mögen zwei positive Konstanten r und γ existieren, derart daß für $|s| \geqq r$ die Funktion $f(s)$ im Endlichen überall regulär ist und sich dort durch die Beziehung*

$$|f(s)| \leqq e^{|s|^\gamma}$$

abschätzen läßt.

c) *Für $\sigma > 1$ sei $f(s)$ durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

definiert.

Man betrachte ferner bie beiden Funktionalgleichungen:

$$f(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{\lambda} f(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1-s}{2}}, \tag{I}$$

$$f(s)\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{\lambda} f(1-s)\,\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1-s}{2}}, \tag{II}$$

unter λ einen beliebigen Parameter, unter k eine feste positive Zahl verstanden. Auf diese Relationen wird man für ganzzahliges k und für $\lambda = \pm 1$ durch das Studium der Dirichletschen L-Reihen geführt, deren Koeffizienten eigentliche Charaktere modulo k sind.

Nunmehr fragen wir nach allen Funktionen $f(s)$, die den Bedingungen **a)**, **b)**, **c)** genügen und gleichzeitig Lösungen einer der beiden Funktionalgleichungen (I), (II) sind.

2. Auf die Resultate der zweiten Mitteilung gestützt, wird zunächst bewiesen, daß jede der Funktionalgleichungen nur dann eine Lösung besitzt, wenn k eine ganze Zahl (§ 1) und (§ 2) $\lambda = \pm 1$ ist. Für diesen Fall ergibt sich (§ 2), daß im ganzen k und nur k voneinander linear unabhängige Dirichletsche Reihen $f(s)$ existieren, von denen jede je einer derjenigen vier Funktionalgleichungen genügt, welche entstehen, wenn man in (I) und (II) λ erst durch 1, dann durch -1 ersetzt. Es gelingt auch anzugeben, wie sich die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen auf jede einzelne der vier Funktionalgleichungen verteilt (vgl. die Tabelle am Schluß des § 2).

3. Im § 3 werden diejenigen Lösungen der Funktionalgleichungen untersucht, auf welche man durch die Reihen geführt wird, deren Koeffizienten eigentliche Charaktere modulo k sind. Bei dieser Gelegenheit wird die Funktionalgleichung der L-Reihen[2]) von neuem abgeleitet, ohne ϑ-Relationen

[2]) Die Funktionalgleichung der L-Reihen findet sich zuerst in einer Abhandlung von H. Kinkelin, Allgemeine Theorie der harmonischen Reihe mit Anwendungen

benutzen. Im § 4 werden weitere Lösungen der Funktionalgleichungen gesucht, indem man auch diejenigen L-Reihen heranzieht, deren Koeffiten eigentliche Charaktere modulo d sind, unter d einen echten Teiler k verstanden (vgl. Formel (57) bis (60)).

In den §§ 5—7 wird endlich bewiesen, daß die in den §§ 3 und 4 gefundenen Lösungen der Funktionalgleichungen ein System von k linear bhängigen Dirichletschen Reihen $f(s)$ bilden, daß somit dieses System h dem Resultate des § 2 ein vollständiges System von Lösungen ist.

4. Bei dem Leser dieser Mitteilung wird eine Kenntnis der spezielleren genschaften der L-Reihen, insbesondere die Kenntnis ihrer Funktionalichungen nicht vorausgesetzt, sondern zum Verständnis der vorliegenden len genügt die Bekanntschaft mit den einfachsten Eigenschaften der araktere, so wie sie etwa im Landauschen Handbuche[3]) **1**, S. 391—413 95—101) und S. 478—486 (§§ 125—126) dargestellt sind.

§ 1.

twendige und hinreichende Bedingungen für die Koeffizienten von irichletschen Reihen, die einer der beiden Funktionalgleichungen genügen.

1. Um für unsere Problemstellung die Sätze der zweiten Mitteilung tzbar zu machen, schreibe man die Funktionalgleichungen (I) und (II) der Gestalt:

$$\frac{1}{\lambda} k^{-s+\frac{1}{2}} f(1-s) = f(s) \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \pi^{-s+\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{\lambda} k^{-s+\frac{1}{2}} f(1-s) = f(s) \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)} \pi^{-s+\frac{1}{2}}.$$

erbei sei unter $f(s)$ die Dirichletsche Reihe (1), unter λ ein beiger Parameter und unter k zunächst eine feste positive (nicht notwendig nze) Zahl verstanden. Außerdem setze man

$$b_n = \frac{a_n}{\lambda \sqrt{k}}, \qquad l_n = \frac{n}{k},$$

---

die Zahlentheorie, Programm der Gewerbeschule Basel (1861/62). S. 1—32. Unängig davon wurden die Funktionalgleichungen von R. Lipschitz wiedergefunden der Arbeit, Untersuchungen der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen, rn. f. r. u. angew. Math. **105** (1899), S. 127—156. Vgl. auch E. Landau, Handbuch Lehre von der Verteilung der Primzahlen (2 Bände), Leipzig 1909 (im folgenden z mit Landau, Handbuch zitiert) **1**, S. 486—497, siehe auch die Literaturangaben 2, 99.

[3]) l. c. Anm. [2]).

so daß man für das Produkt $\frac{1}{\lambda} k^{-s+\frac{1}{2}} f(1-s)$ die in der Halbebene $\sigma < 0$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$\frac{1}{\lambda} k^{-s+\frac{1}{2}} f(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{l_n^{1-s}} \tag{5}$$

erhält.

Nunmehr läßt sich unser Problem auch so formulieren:

Wie müssen bei vorgegebenem k der Parameter λ und die Koeffizienten a_n gewählt werden, damit das Produkt

$$g(1-s) = \pi^{-s+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} f(s) \quad \text{bzw.} \quad g^*(1-s) = \pi^{-s+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)} f(s$$

sich in eine Dirichletsche Reihe der Gestalt (5) *entwickeln läßt, wobei die b_n und l_n noch den Relationen* (4) *genügen?*

2. Die Sätze 3 bzw. 6 der 2. Mtlg. geben nun gewisse notwendige Bedingungen an, denen die Koeffizienten b_n und die positiven Zahlen l_n genügen müssen, damit die Produkte $g(1-s)$ bzw. $g^*(1-s)$ sich in eine beliebige Dirichletsche Reihe der Gestalt (5) (ohne die einschränkenden Relationen (4)) entwickeln lassen. So folgt zunächst aus den Bedingungen **e)**, daß zugleich mit l_m auch $l_m + 1$ eine der Zahlen l_n ist. Dies besagt aber in unserm Falle wegen (4), daß auch die Zahlen

$$l_m + 1 = \frac{m}{k} + 1 = \frac{m+k}{k}$$

von der Form $l_n = \frac{n}{k}$ sein müssen, was dann und nur dann der Fall ist, wenn k eine ganze positive Zahl ist. Es gilt mithin

Satz 8. *Damit eine der beiden Funktionalgleichungen* (I), (II) *einer Lösung $f(s)$ besitzt, die den Bedingungen* **a)**, **b)**, **c)** *genügt, ist notwendig, daß k eine positive ganze Zahl ist.*

3. Im folgenden bedeute ein für allemal k eine ganze Zahl $\geqq 1$.

Dann ergibt sich $l_k = 1$ und, wenn $n = \mu k + \varkappa$ gesetzt wird, (unter μ und $\varkappa$ ganze positive Zahlen verstanden)

$$l_n = \mu + \frac{\varkappa}{k} = \mu + l_\varkappa.$$

Für die b_n folgen aus **e)** außerdem noch die Periodizitätsbedingungen

$$b_n = b_\varkappa \qquad (n = \mu k + \varkappa),$$

mithin wegen (4)

$$a_n = a_\varkappa, \quad \text{wenn} \quad n \equiv \varkappa \pmod{k}. \tag{6}$$

Diese Koeffizienteneigenschaft ist somit allen Dirichletschen Reihen $f(s)$ meinsam, die eine der vier Funktionalgleichungen genügen.

Aus den Bedingungen **f)** und **g)** von Satz 3 (2. Mtlg.) ergibt sich dlich (bezüglich der Funktionalgleichungen (I)), wenn für die $b_\varkappa$ und $l_\varkappa$ e Werte aus (4) eingesetzt werden, die Relation

$$a_\varkappa = a_{k-\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1),$$

$$a_n = \frac{1}{\lambda\sqrt{k}} \sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa \cos 2\pi n \frac{\varkappa}{k},$$

w. aus **f')** und **g')** von Satz 6 (2. Mtlg.) (bezüglich der Funktionalichung (II))

$$a_\varkappa = -a_{k-\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1),$$

$$a_n = \frac{1}{\lambda\sqrt{k}} \sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa \sin 2\pi n \frac{\varkappa}{k}.$$

Da

$$\cos 2\pi n \frac{\varkappa}{k} = \cos 2\pi (n + \mu k) \frac{\varkappa}{k}, \quad \sin 2\pi n \frac{\varkappa}{k} = \sin 2\pi (n + \mu k) \frac{\varkappa}{k}$$

so folgen aus (8) bzw. (10) von neuem die bereits bewiesenen Reionen (6) und außerdem erkennt man, daß die Formeln (8) bezw. (10) chstens k voneinander verschiedene lineare homogene Gleichungen für $a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ liefern.

4. Berücksichtigt man, daß nach Satz 4 bezw. 7 (2. Mtlg.) die Bedingungen **e)**, **f)**, **g)** bzw. **e')**, **f')**, **g')** nicht nur notwendig, sondern auch reichend sind für das Bestehen der Funktionalgleichung zwischen den richletschen Reihen $f(s)$ und $g(1-s)$ bzw. $g^*(1-s)$, so ergibt sich den bisher abgeleiteten Resultaten:

Satz 9. *Damit $f(s)$ außer den Bedingungen* **a)**, **b)**, **c)** *einer der den Funktionalgleichungen genügt, ist notwendig und hinreichend:*

Erstens, daß $f(s)$ eine Dirichletsche Reihe vom Typus

$$f(s) = \sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu k + \varkappa)^s}$$

zweitens, daß zwischen den k Koeffizienten $a_\varkappa$ folgende lineare Relationen bestehen:

für Lösungen von (I)*:*

$$\begin{cases} a_\varkappa = a_{k-\varkappa} & (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1) \\ \lambda a_n = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa \cos 2\pi n \frac{\varkappa}{k}; \end{cases}$$

für Lösungen von (II):

$$(*II)\qquad \begin{cases} a_\varkappa = -\,a_{k-\varkappa} & (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1), \\ \lambda a_n = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \sum\limits_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa \sin 2\pi n \dfrac{\varkappa}{k}. \end{cases}$$

§ 2.

Die Anzahl der linear unabhängigen Dirichletschen Reihen, die den Funktionalgleichungen genügen.

1. Wie aus der Gestalt der Reihe (11) unmittelbar ersichtlich ist, hängt eine Lösung einer der Funktionalgleichungen höchstens von k Parametern ab, nämlich von den k ersten Koeffizienten der Dirichletschen Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Zwischen diesen k Parametern bestehen aber noch weitere lineare homogene Gleichungen, die in den Beziehungen (*I) bzw. (*II) formuliert sind. *Die Werte von λ, für welche die Funktionalgleichungen* (I) *bzw.* (II) *Lösungen besitzen, sind nach Satz* 9 *offenbar die Eigenwerte des homogenen linearen Gleichungssystems* (*I) *bzw.* (*II), *und außerdem stimmt die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen $f(s)$ von* (I) *bzw.* (II) *für einen bestimmten Eigenwert λ mit der Anzahl derjenigen linear unabhängigen Lösungen von* (*I) *bzw.* (*II) *überein, welche zu dem gleichen Eigenwert gehören.*

Um die Eigenwerte von (*I) bzw. (*II) und die zugehörige Anzahl linear unabhängiger Lösungen zu bestimmen, fassen wir die Gleichungen (7) und (8) bzw. (9) und (10) in einer bequemeren Form zusammen. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem k gerade oder ungerade ist.

2. Erster Fall. $k = 2m + 1$.

Wir führen für die Koeffizienten des Gleichungssystems (8) abkürzende Bezeichnungen ein.

$$(12)\qquad \begin{cases} c_{n0} = c_{nk} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} & (n = 0, 1, 2, \ldots, k-1), \\ \dfrac{c_{n\varkappa}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \cos 2\pi n \dfrac{\varkappa}{k} & \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \\ \varkappa = 1, 2, \ldots, k-1 \end{pmatrix}; \end{cases}$$

dann ist offenbar

$$(13)\qquad c_{n\varkappa} = c_{n,k-\varkappa} = c_{k-n,\varkappa}.$$

Setzt man noch $a_0 = a_k$, so ergibt sich, indem man (7) und (8) mit Rücksicht auf (12) und (13) zusammenfaßt,

$$(14)\qquad \lambda a_n = \sum_{\varkappa=0}^{m} c_{n\varkappa} a_\varkappa \qquad (n = 0, 1, \ldots, k-1).$$

diesem System von k Gleichungen stimmen aber wegen (7) und (13) ner je zwei Gleichungen (mit den Indizes n und $k-n$) miteinander rein, so daß sich ihre Anzahl auf $m+1$ reduziert. Mithin lassen sich Relationen (14) als ein System von $m+1$ linearen homogenen ichungen in den $m+1$ Unbekannten $a_0, a_1, \ldots, a_m$ auffassen.

3. Um die Eigenwerte von (14) zu bestimmen, bilde man die „Säkular-ichung"

$$\begin{vmatrix} c_{00}-\lambda, c_{01} & , \ldots, c_{0m} \\ c_{10} & , c_{11}-\lambda, \ldots, c_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m0} & , c_{m1} \quad , \ldots, c_{mm}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

kürzend schreibe man die Gleichung (15) in der Form $|C-\lambda E|=0$, er E die Einheitsmatrix verstanden und unter C diejenigen Matrix, che aus den $(m+1)^2$ Elementen $c_{n\varkappa}$ $(n, \varkappa = 0, 1, \ldots, m)$ zusammen-etzt ist.

Um die Wurzeln der Gleichung (15) zu finden, bilden wir die ichung

$$|C^2-\lambda^2 E| = |C-\lambda E|\cdot|C+\lambda E| = 0. \tag{16}$$

e einfache Rechnung zeigt aber, daß die Matrix C^2, das symbolische drat der Matrix C, gleich der Einheitsmatrix E wird. Folglich ist $=1$ die einzige Wurzel der Ordnung $m+1$ der Gleichung (16), die n Grade $m+1$ in λ^2 ist. Mithin kann der Ausdruck $|C-\lambda E|$ nur $\lambda=1$ oder $\lambda=-1$ verschwinden.

Ist $\lambda=1$ eine Wurzel der Ordnung r_1 von (15), $\lambda=-1$ eine rzel der Ordnung r_2, so ist

$$r_1+r_2 = m+1, \tag{17}$$

die Gleichung (15) vom Grade $m+1$ in λ ist.

Andererseits ist nach fundamentalen Sätzen aus der Theorie der linearen ichungen r_1 (bzw. r_2) gleich der Anzahl derjenigen voneinander linear bhängigen Lösungen des Systems (14), welche zu dem Eigenwerte 1 (bzw. $\lambda=-1$) gehören. Hierbei ist gleichzeitig, wie man sich nert, nach Satz 9 r_1 (bzw. r_2) die genaue Anzahl der voneinander ar unabhängigen Dirichletschen Reihen $f(s)$, die der Funktional-chung (I) genügen, wenn man in (I) λ durch 1 (bzw. durch -1) tzt.

4. Um den Wert von r_1 und r_2 einzeln zu berechnen, berücksichtigen daß r_1-r_2 gleich der Summe der Wurzeln von (15) ist, mithin

gleich demjenigen Koeffizienten der Gleichung (15), welcher mit $(-\lambda)^m$ multipliziert ist; es ergibt sich folglich wegen $\cos \varkappa^2 \frac{2\pi}{k} = \cos (k-\varkappa)^2 \frac{2\pi}{k}$

$$r_1 - r_2 = \sum_{\varkappa=0}^{m} c_{\varkappa\varkappa} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(1 + 2\sum_{\varkappa=1}^{m} \cos \varkappa^2 \frac{2\pi}{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \cos \varkappa^2 \frac{2\pi}{k}.$$

Der Ausdruck rechter Hand ist aber eine sogenannte Gaußsche Summe, deren Wert $= 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem $k = 4\mu + 1$ oder $= 4\mu + 3$ ist[4].

In Verbindung mit (17) ergibt sich endlich:

$$(18)\quad \begin{cases} \text{im Falle } k = 4\mu + 1 \quad (m = 2\mu) & \text{ist } r_1 = \mu + 1,\ r_2 = \mu, \\ \text{im Falle } k = 4\mu + 3 \quad (m = 2\mu + 1) & \text{ist } r_1 = \mu + 1,\ r_2 = \mu + 1. \end{cases}$$

5. Um aus (9) und (10) das homogene lineare Gleichungssystem abzuleiten, welches die Lösungen von (II) liefert, führe man für die Koeffizienten von (10) abkürzende Bezeichnungen ein:

$$(19)\quad \begin{cases} d_{n\,k} = 0 & (n = 0, 1, \ldots, k), \\ \dfrac{d_{n\varkappa}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \sin 2\pi n \dfrac{\varkappa}{k} & \begin{pmatrix} n = 0, 1, \ldots, k \\ \varkappa = 1, 2, \ldots, k-1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Dann ist offenbar

$$(20)\qquad d_{n\varkappa} = -d_{n,\,k-\varkappa} = -d_{k-n,\,\varkappa}.$$

Man bemerkt ferner, daß

$$d_{\varkappa 0} = d_{0\varkappa} = d_{k,\,\varkappa} = 0,$$

mithin wegen (10) auch $a_k = 0$ ist.

Indem man (9) und (10) zusammenfaßt, ergeben sich mit Rücksicht auf (19) und (20) die Beziehungen

$$(21)\qquad \lambda a_n = \sum_{\varkappa=1}^{m} d_{n\varkappa} a_\varkappa \qquad (n = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Wegen (9) und (20) stimmen aber je zwei Gleichungen (mit den Indizes n und $k-n$) miteinander überein, so daß (21) als ein System von m linearen homogenen Gleichungen mit den m Unbekannten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ aufgefaßt werden kann.

Um die Eigenwerte dieses Systems zu bestimmen, bilde man die „Säkulargleichung"

---

[4]) Vgl. etwa P. G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind, 4. Aufl. (1894), S. 295–296. Vgl. auch einen neuen, sehr einfachen Beweis von I. Schur „Über die Gaußschen Summen", Göttinger Nachr. (1921), S. 113–119, der auf der Untersuchung einer der Matrix (15) sehr ähnlichen Matrix beruht.

$$\begin{vmatrix} d_{11}-\lambda, d_{12} & , \ldots, d_{1m} \\ d_{21} & , d_{22}-\lambda, \ldots, d_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{m1} & , d_{m2} \quad , \ldots, d_{mm}-\lambda \end{vmatrix} = |D-\lambda E| = 0,$$

er D diejenigen Matrix verstanden, welche aus den m^2 Elementen $(n, \varkappa = 1, 2, \ldots, m)$ zusammengesetzt ist.

Da sich nach leichter Rechnung $D^2 = E$ ergibt, so folgt andererseits, $\lambda^2 = 1$ die einzige m-fache Wurzel der Gleichung m-ten Grades in λ^2

$$|D^2 - \lambda^2 E| = |D-\lambda E|\,|D+\lambda E| = 0$$

Mithin kann der Ausdruck $|D-\lambda E|$ nur für $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ schwinden. Ist $\lambda = 1$ eine Wurzel der Ordnung ϱ_1 von (22), $\lambda = -1$ e Wurzel der Ordnung ϱ_2, so ergibt sich

$$\varrho_1 + \varrho_2 = m,$$

der Ausdruck $|D-\lambda E|$ vom Grade m in λ ist.

Ebenso wie oben ergibt sich, daß ϱ_1 (bzw. ϱ_2) die Anzahl derjenigen einander linear unabhängigen Lösungen des Systems (21) ist, welche dem Eigenwerte $\lambda = 1$ (bzw. $\lambda = -1$) gehören; mithin gleichzeitig, ϱ_1 (bzw. ϱ_2) gleich der Anzahl der voneinander linear unabhängigen hen $f(s)$ ist, die der Funktionalgleichung (II) für $\lambda = 1$ (bzw. $\lambda = -1$) ügen.

Um den Wert von ϱ_1 und ϱ_2 einzeln zu berechnen, benutzen wir nso wie oben den Umstand, daß

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \sum_{\varkappa=1}^{m} d_{\varkappa\varkappa} = \frac{2}{\sqrt{k}} \sum_{\varkappa=1}^{m} \sin \varkappa^2 \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \sin \varkappa^2 \frac{2\pi}{k}$$

Die Gaußsche Summe rechter Hand nimmt aber den Wert 0 oder 1), je nachdem k von der Form $4\mu+1$ oder $4\mu+3$ ist.

In Verbindung mit (23) ergibt sich mithin:

$$\begin{cases} \text{im Falle } k = 4\mu+1 \quad (m = 2\mu) & \text{ist } \varrho_1 = \mu \quad , \ \varrho_2 = \mu, \\ \text{im Falle } k = 4\mu+3 \quad (m = 2\mu+1) & \text{ist } \varrho_1 = \mu+1, \ \varrho_2 = \mu. \end{cases}$$

6. Zweiter Fall: $k = 2m$.

Man setze

$$c_{n0} = c_{nk} = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad c_{nm} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cos \pi n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{k}} \quad (n = 0, 1, \ldots, k).$$

[5]) l. c. Anm. [4]).

$$\frac{c_{n\varkappa}}{2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cos 2\pi n \frac{\varkappa}{k} \qquad \begin{pmatrix} n=0, 1, \ldots, k \\ \varkappa=1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, k-1 \end{pmatrix},$$

$$d_{n0} = d_{nk} = 0, \quad d_{nm} = 0 \qquad (n=0, 1, \ldots, k),$$

$$\frac{d_{n\varkappa}}{2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin 2\pi n \frac{\varkappa}{k} \qquad \begin{pmatrix} n=0, 1, \ldots, k \\ \varkappa=1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, k-1 \end{pmatrix};$$

dann ist offenbar (vgl. (13) und (20))

$$(25) \qquad \begin{cases} c_{n\varkappa} = c_{n,k-\varkappa} = c_{k-n,\varkappa}, \\ d_{n\varkappa} = -d_{n,k-\varkappa} = -d_{k-n,\varkappa}. \end{cases}$$

Indem man wieder $a_0 = a_k$ setzt, die Gleichungen (*I) bzw. (*II) aus Satz 9 zusammenfaßt, ergibt sich wegen (25) und wegen $d_{nm} = 0$

$$(26) \qquad \lambda a_n = \sum_{\varkappa=0}^{m} c_{n\varkappa} a_\varkappa \qquad (n=0, 1, \ldots, k-1),$$

$$(27) \qquad \lambda a_n = \sum_{\varkappa=1}^{m-1} d_{n\varkappa} a_\varkappa \qquad (n=0, 1, \ldots, k-1).$$

In diesen beiden Gleichungssystemen stimmen wegen (25) und (7) bzw. (9) immer je zwei Gleichungen (mit den Indizes n und $k-n$) miteinander überein. Außerdem ergibt sich aus (27) wegen $d_{0\varkappa} = d_{m\varkappa} = 0$ für alle $\varkappa$ auch $a_0 = a_m = 0$. Mithin kann (26) als ein System von $m+1$ homogenen linearen Gleichungen mit den $m+1$ Unbekannten $a_0, a_1, \ldots, a_m$ aufgefaßt werden, (27) als ein System von $m-1$ homogenen linearen Gleichungen mit den $m-1$ Unbekannten $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$.

Um die Eigenwerte von (26) bzw. (27) zu bestimmen, untersuche man die Säkulargleichungen (vgl. (15) und (22))

$$|C - \lambda E| = 0, \qquad |D - \lambda E| = 0.$$

Hierbei bezeichnet C diejenige Matrix, welche aus den $(m+1)^2$ Elementen $c_{n\varkappa}$ $(n, \varkappa = 0,1, \ldots, m)$ gebildet ist, D die Matrix der $(m-1)^2$ Elemente $d_{n\varkappa}$ $(n, \varkappa = 1, 2, \ldots, m-1)$.

Man bemerke wieder, daß $C^2 = E$ und $D^2 = E$ ist, daß mithin $\lambda^2 = 1$ die einzige Wurzel der Gleichungen

$$|C^2 - \lambda^2 E| = |C - \lambda E||C + \lambda E| = 0,$$
$$|D^2 - \lambda^2 E| = |D - \lambda E||D + \lambda E| = 0$$

ist. Mithin können die Ausdrücke $|C - \lambda E|$ und $|D - \lambda E|$ nur für $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$ verschwinden.

7. Es bezeichne r_1 (bzw. r_2) ebenso wie in Abschnitt 3. dieses Paragraphen die Ordnung der Wurzel $\lambda = 1$ (bzw. $\lambda = -1$), die der Gleichung

$-\lambda E| = 0$ genügt. Dann ist r_1 (bzw. r_2) die Anzahl derjenigen von-
ander linear unabhängigen Lösungen des Gleichungssystems (26), welche
dem Eigenwerte $\lambda = 1$ (bzw. $\lambda = -1$) gehören; und gleichzeitig die
zahl der voneinander linear unabhängigen Dirichletschen Reihen $f(s)$,
der Funktionalgleichung (I) für $\lambda = 1$ (bzw. $\lambda = -1$) genügen.

Nun ist aber

$$r_1 + r_2 = m + 1,$$

das Polynom $|C - \lambda E|$ vom Grade $m+1$ in λ ist.

Andererseits ist (vgl. Abschnitt 4.)

$$r_1 - r_2 = \sum_{\varkappa=0}^{m} c_{\varkappa\varkappa} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(1 + 2\sum_{\varkappa=1}^{m-1} \cos \varkappa^2 \frac{2\pi}{k} + \cos \pi m\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \cos \varkappa^2 \frac{2\pi}{k},$$

hin nach den Formeln für Gaußsche Summen

$$r_1 - r_2 = 1 \text{ oder } 0,$$

nachdem $k = 4\mu$ oder $k = 4\mu + 2$ ist.

In Verbindung mit (28) ergibt sich somit:

$$\begin{cases} \text{im Falle } k = 4\mu & (m = 2\mu) & \text{ist } r_1 = \mu + 1,\ r_2 = \mu, \\ \text{im Falle } k = 4\mu + 2 & (m = 2\mu + 1) & \text{ist } r_1 = \mu + 1,\ r_2 = \mu + 1. \end{cases}$$

Bezeichnet wieder, wie im Abschnitt 5. dieses Paragraphen, ϱ_1 (bzw.
die Ordnung der Wurzel $\lambda = 1$ (bzw. $\lambda = -1$), die der Gleichung
$-\lambda E| = 0$ genügt, so ist ϱ_1 (bzw. ϱ_2) gleich der Anzahl derjenigen
einander linear unabhängigen Lösungen des Gleichungssystems (27),
che zu dem Eigenwert $\lambda = 1$ (bzw. $\lambda = -1$) gehören; und gleichzeitig
ich der Anzahl der voneinander linear unabhängigen Dirichletschen
hen $f(s)$, die der Funktionalgleichung (II) für $\lambda = 1$ (bzw. $\lambda = -1$)
ügen.

Nun ist aber

$$\varrho_1 + \varrho_2 = m - 1,$$

das Polynom $|D - \lambda E|$ vom Grade $m-1$ in λ ist.

Andererseits ergibt sich ebenso wie in Abschnitt 5.

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \sum_{\varkappa=1}^{m-1} d_{\varkappa\varkappa} = \frac{2}{\sqrt{k}} \sum_{\varkappa=1}^{m-1} \sin \varkappa^2 \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \sin \varkappa^2 \frac{2\pi}{k} = 1 \text{ oder } 0$$

ormel für Gaußsche Summen), je nachdem $k = 4\mu$ oder $= 4\mu + 2$ ist.

In Verbindung mit (30) erhält man:

$$(31)\quad \begin{cases} \text{im Falle } k=4\mu \quad (m=2\mu) & \text{ist } \varrho_1=\mu,\ \varrho_2=\mu-1, \\ \text{im Falle } k=4\mu+2 \quad (m=2\mu+1) & \text{ist } \varrho_1=\mu,\ \varrho_2=\mu. \end{cases}$$

8. Wir fassen die Resultate der Formeln (18), (24), (29) und (31) in dem Satze zusammen:

Satz 10. Es existieren genau

r_1 *voneinander linear unabhängige Lösungen* $f(s)$ *von* (I) *für* $\lambda=1$,
r_2 . . . . . (I) *für* $\lambda=-1$,
ϱ_1 . . . . . (II) *für* $\lambda=1$,
ϱ_2 . . . . . (II) *für* $\lambda=-1$,

wobei unter $f(s)$ *eine Funktion zu verstehen ist, die den Bedingungen* a), b) *und* c) *genügt.*

Die Werte für die Zahlen r_1, r_2, ϱ_1, ϱ_2 *entnehme man der folgenden Tabelle:*

	r_1	r_2	ϱ_1	ϱ_2	$r_1+r_2+\varrho_1+\varrho_2$
$k=4\mu$	$\mu+1$	μ	μ	$\mu-1$	k
$k=4\mu+1$	$\mu+1$	μ	μ	μ	k
$k=4\mu+2$	$\mu+1$	$\mu+1$	μ	μ	k
$k=4\mu+3$	$\mu+1$	$\mu+1$	$\mu+1$	μ	k

Hat man mithin ein System von r_1 *linear unabhängigen Dirichletschen Reihen* $f(s)$, *die der Funktionalgleichung* (I) *für* $\lambda=1$ *genügen, so läßt sich jede Lösung* $f(s)$ *von* (I) *für* $\lambda=1$, *wenn sie die Voraussetzungen* a), b), c) *erfüllt, als homogene lineare Verbindung der* r_1 *Dirichletschen Reihen des Fundamentalsystems darstellen. Das Entsprechende gilt für jede Lösung* $f(s)$ *von* (I) *für* $\lambda=-1$ *bzw. von* (II) *für* $\lambda=1$ *oder* $\lambda=-1$.

Zusatz. *Es bezeichne* $F(s)$ *eine beliebige Dirichletsche Reihe der Gestalt* (11):

$$F(s)=\sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa \sum_{u=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu k+\varkappa)^s}.$$

Dann läßt sich $F(s)$ *als Summe von vier Dirichletschen Reihen*

$$F(s)=f_1(s)+f_2(s)+f_3(s)+f_4(s)$$

derart darstellen, daß $f_1(s)$ (*bzw.* $f_2(s)$) *der Funktionalgleichung* (I), *für* $\lambda=1$ (*bzw.* $\lambda=-1$) $f_3(s)$ (*bzw.* $f_4(s)$ *der Funktionalgleichung* (II) *für* $\lambda=1$ (*bzw.* $\lambda=-1$) genügt.

Wir verzichten auf die Angabe des einfachen Beweises, der sich auf Relation $r_1 + r_2 + \varrho_1 + \varrho_2 = k$ (für jedes k, vgl. die Tabelle) stützt, überlassen ihn dem Leser.

§ 3.

Neuer Beweis für die Funktionalgleichung der L-Reihen.

1. Es bezeichne $\chi(n; k)$ einen eigentlichen Charakter modulo k, $\bar{\chi}(n; k)$ die zu $\chi(n; k)$ konjugiert komplexe Größe, die selbst wieder ein eigentlicher Charakter modulo k ist.

Setzt man

$$\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\varkappa=1}^{k} \chi(\varkappa; k)\, e^{\frac{2\pi\varkappa i}{k}},$$

bestehen für alle n die Gleichungen[6])

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \chi(\varkappa; k)\, e^{\frac{2\pi\varkappa n i}{k}} = \sqrt{k}\, \varepsilon(k)\, \bar{\chi}(n; k),$$

es ist überdies

$$|\varepsilon(k)| = 1^{7}).$$

n multipliziert man beide Seiten von (32) mit $e^{-\frac{2\pi m n i}{k}}$ und summiert über n, so erhält man

$$\sum_{n=1}^{k} \sum_{\varkappa=1}^{k} \chi(\varkappa; k)\, e^{\frac{2\pi(\varkappa-m)ni}{k}} = \sqrt{k}\, \varepsilon(k) \sum_{n=1}^{k} \bar{\chi}(n; k)\, e^{-\frac{2\pi m n i}{k}}.$$

an man die Summation nach n zuerst ausführt, erkennt man, daß die e Seite dieser Gleichung den Wert $k\chi(m; k)$ hat, rechts ergibt sich, m man Formel (32) noch einmal anwendet, $\sqrt{k}\,\varepsilon(k)\sqrt{k}\,\bar{\varepsilon}(k)\,\chi(m; k)$. ain ist

$$\varepsilon(k) \cdot \bar{\varepsilon}(k) = 1, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

2. Nunmehr unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall I: $\chi(k-1; k) = 1.$

Dann ist

$$\chi(\varkappa; k) = \chi(k-\varkappa; k);$$

aus den Fundamentaleigenschaften der Charaktere folgt[8])

$$\chi(\varkappa; k) = \chi(\varkappa k - \varkappa; k) = \chi(k-\varkappa; k).$$

---

[6]) Vgl. Landau, Handbuch 1, § 126, S. 483—486; siehe auch dort die genauen aturangaben 2, S. 898—899.

[7]) Landau, Handbuch 1, S. 489.

[8]) Vgl. Landau, Handbuch 1, S. 405—406, Satz 1 und 2.

Setzt man

$$\frac{\chi(n;k)}{\sqrt{\varepsilon(k)}} = \alpha_n(k) + i\beta_n(k), \quad [9] \tag{35}$$

so ist wegen (33)

$$\sqrt{\varepsilon(k)}\,\bar{\chi}(n;k) = \alpha_n(k) - i\beta_n(k). \tag{36}$$

Nunmehr soll aus (32) geschlossen werden, daß die α_n (bzw. die β_n) dem Gleichungssystem (*I) aus Satz 9 für $\lambda = 1$ (bzw. $\lambda = -1$) genügen. Und in der Tat folgt, wenn man beide Seiten von (32) durch $\sqrt{\varepsilon(k)}$ dividiert und Reelles von Imaginärem trennt, in Verbindung mit (35) und (36)

$$\begin{cases} \sum_{\varkappa=1}^{k} \left(\alpha_\varkappa(k)\cos\frac{2\pi\varkappa n}{k} - \beta_\varkappa(k)\sin\frac{2\pi\varkappa n}{k}\right) = \sqrt{k}\,\alpha_n(k), \\ \sum_{\varkappa=1}^{k} \left(\alpha_\varkappa(k)\sin\frac{2\pi\varkappa n}{k} + \beta_\varkappa(k)\cos\frac{2\pi\varkappa n}{k}\right) = -\sqrt{k}\,\beta_n(k). \end{cases} \tag{37}$$

Andererseits ist aber wegen (34)

$$\alpha_\varkappa(k) = \alpha_{k-\varkappa}(k); \qquad \beta_\varkappa(k) = \beta_{k-\varkappa}(k) \tag{38}$$

und somit wegen $\sin\frac{2\pi\varkappa n}{k} = -\sin\frac{2\pi(k-\varkappa)n}{k}$

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \alpha_\varkappa(k)\sin\frac{2\pi\varkappa n}{k} = 0, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} \beta_\varkappa(k)\sin\frac{2\pi\varkappa n}{k} = 0$$

Mithin ergibt sich aus (37)

$$\begin{cases} \sum_{\varkappa=1}^{k} \alpha_\varkappa(k)\cos\frac{2\pi\varkappa n}{k} = \sqrt{k}\,\alpha_\varkappa(k), \\ \sum_{\varkappa=1}^{k} \beta_\varkappa(k)\cos\frac{2\pi\varkappa n}{k} = -\sqrt{k}\,\beta_\varkappa(k). \end{cases} \tag{39}$$

Setzt man

$$A(s;k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(k)}{n^s}, \qquad A'(s;k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n(k)}{n^s} \tag{40}$$

so folgt aus Satz 9 wegen (38) und (39), daß $A(s;k)$ (bzw. $A'(s;k)$) der Funktionalgleichnng (I) für $\lambda = 1$ (bzw. $\lambda = -1$) genügt.

3. Bezeichnen $L(s;k)$ und $L'(s;k)$ die Dirichletschen Reihen

$$L(s;k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n;k)}{n^s}, \qquad L'(s;k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(n;k)}{n^s}, \tag{41}$$

[9] Unter $\sqrt{\varepsilon(k)}$ ist immer derjenige Wert zu verstehen, dessen reeller Teil positiv ist.

st wegen (35) und (36)

$$\begin{cases} A(s;k)+iA'(s;k)=\dfrac{L(s;k)}{\sqrt{\varepsilon(k)}}, \\ A(s;k)-iA'(s;k)=\dfrac{L'(s;k)}{\sqrt{\bar{\varepsilon}(k)}}=\sqrt{\varepsilon(k)}L'(s;k), \end{cases}$$

es ergibt sich offenbar, indem man auf $A(s;k)$ (bzw. $A'(s;k)$) die ktionalgleichung (I) für $\lambda=1$ (bzw. $\lambda=-1$) anwendet,

$$L(s;k)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}}=\varepsilon(k)L'(1-s;k)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1-s}{2}}.$$

mit ist von neuem bewiesen, daß die Dirichletschen L-Reihen, deren ffizienten eigentliche Charaktere modulo k sind, für den Fall $\chi(k-1;k)=1$ Funktionalgleichung (43) genügen.

4. Fall II: $\chi(k-1;k)=-1$.

Aus der Voraussetzung folgt hier

$$\chi(\varkappa;k)=-\chi(\varkappa k-\varkappa;k)=-\chi(k-\varkappa;k).$$

Nunmehr setze man

$$\frac{\chi(n;k)}{\sqrt{-i\varepsilon(k)}}=\gamma_n(k)+i\delta_n(k) \qquad (\sqrt{-i\varepsilon(k)}=e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\varepsilon(k)}).$$

in ist wegen (33)

$$\sqrt{-i\varepsilon(k)}\,\bar{\chi}(n;k)=\gamma_n(k)-i\delta_n(k).$$

n folgt aus (32) in Verbindung mit (45) und (46)

$$\begin{aligned}\sum_{\varkappa=1}^{k}(\gamma_\varkappa(k)+i\delta_\varkappa(k))e^{\frac{2\pi\varkappa ni}{k}}&=i\sqrt{k}\sqrt{-i\varepsilon(k)}\,\bar{\chi}(n;k)\\&=\sqrt{k}\,(i\gamma_\varkappa(k)+\delta_\varkappa(k)),\end{aligned}$$

indem man Realteil von Imaginärteil trennt,

$$\begin{cases} \sum\limits_{\varkappa=1}^{k}\left(\gamma_\varkappa(k)\cos\dfrac{2\pi\varkappa n}{k}-\delta_\varkappa(k)\sin\dfrac{2\pi\varkappa n}{k}\right)=\sqrt{k}\,\delta_\varkappa(k), \\ \sum\limits_{\varkappa=1}^{k}\left(\gamma_\varkappa(k)\sin\dfrac{2\pi\varkappa n}{k}+\delta_\varkappa(k)\cos\dfrac{2\pi\varkappa n}{k}\right)=\sqrt{k}\,\gamma_\varkappa(k). \end{cases}$$

rerseits ist aber wegen (44)

$$\gamma_\varkappa(k)=-\gamma_{k-\varkappa}(k), \qquad \delta_\varkappa(k)=-\delta_{k-\varkappa}(k),$$

und somit, da $\cos\frac{2\pi\varkappa n}{k} = \cos\frac{2\pi(k-\varkappa)n}{k}$ ist,

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\gamma_\varkappa(k)\cos\frac{2\pi\varkappa n}{k}=0, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k}\delta_\varkappa(k)\cos\frac{2\pi\varkappa n}{k}=0.$$

Mithin ergibt sich aus (47)

$$(49)\qquad \begin{cases} \sum_{\varkappa=1}^{k}\delta_\varkappa(k)\sin\frac{2\pi\varkappa n}{k} = -\sqrt{k}\,\delta_n(k), \\ \sum_{\varkappa=1}^{k}\gamma_\varkappa(k)\sin\frac{2\pi\varkappa n}{k} = \sqrt{k}\,\gamma_n(k). \end{cases}$$

Setzt man

$$(50)\qquad \mathsf{M}(s;k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n(k)}{n^s}, \qquad \mathsf{M}'(s;k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_n(k)}{n^s},$$

so folgt aus Satz 9 wegen (48) und (49), daß $\mathsf{M}(s;k)$ bzw. $\mathsf{M}'(s;k)$ de Funktionalgleichung (II) für $\lambda=1$ (bzw. $\lambda=-1$) genügt.

Bezeichnen $L(s;k)$ und $L'(s;k)$ die Dirichletschen Reihen (41) so ist wegen (45) und (46)

$$(51)\qquad \begin{aligned} \mathsf{M}(s;k)+i\,\mathsf{M}'(s;k) &= \frac{L(s;k)}{\sqrt{-i\,\varepsilon(k)}} \\ \mathsf{M}(s;k)-i\,\mathsf{M}'(s;k) &= \sqrt{-i\,\varepsilon(k)}\,L'(s;k) \end{aligned}$$

und es ergibt sich offenbar, indem man auf $\mathsf{M}(s;k)$ (bzw. $\mathsf{M}'(s;k)$) di Funktionalgleichung (II) für $\lambda=1$ (bzw. $\lambda=-1$) anwendet, nach ein fachen Umformungen

$$(52)\qquad L(s;k)\,\Gamma\Big(\frac{s+1}{2}\Big)\Big(\frac{\pi}{k}\Big)^{-\frac{s}{2}} = -i\,\varepsilon(k)L'(1-s;k)\,\Gamma\Big(\frac{2-s}{2}\Big)\Big(\frac{\pi}{k}\Big)^{-\frac{1-s}{2}}.$$

Hiermit ist für diejenigen Dirichletschen Reihen, deren Koeffizienten eigentliche Charaktere modulo k sind, auch im Falle $\chi(k-1;k)=-$ die Funktionalgleichung, der sie genügen, von neuem abgeleitet.

§ 4.

Konstruktion neuer Lösungen der Funktionalgleichungen.

1. Lemma I. *Es sei $f(s)$ eine Lösung der Funktionalgleichung (1 für $\lambda=1$; dann genügt*

$$F_1(s;q)=\Big(1+\frac{\sqrt{q}}{q^s}\Big)f(s)$$

der Funktionalgleichung

$$(53)\qquad F_1(s;q)\,\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Big(\frac{\pi}{kq}\Big)^{-\frac{s}{2}} = F_1(1-s;q)\,\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\Big(\frac{\pi}{kq}\Big)^{-\frac{1-s}{2}}$$

$$F_2(s;q) = \left(1 - \frac{\sqrt{q}}{q^s}\right) f(s)$$

gt der Funktionalgleichung

$$F_2(s;q)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{kq}\right)^{-\frac{s}{2}} = -F_2(1-s;q)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{kq}\right)^{-\frac{1-s}{2}}$$

Ist $f(s)$ eine Lösung von (I) *für $\lambda = -1$, so genügt umgekehrt ; q) der Relation* (54) *und $F_2(s;q)$ der Relation* (53).

Ist $f(s)$ eine Lösung von (II) *für $\lambda = 1$, so genügt $F_1(s;q)$ der ktionalgleichung*

$$F_1(s;q)\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{kq}\right)^{-\frac{s}{2}} = F_1(1-s;q)\,\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{kq}\right)^{-\frac{1-s}{2}},$$

; q) der Funktionalgleichung

$$F_2(s;q)\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{kq}\right)^{-\frac{s}{2}} = -F_2(1-s;q)\,\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{kq}\right)^{-\frac{1-s}{2}}.$$

Ist $f(s)$ eine Lösung von (II) *für $\lambda = -1$, so genügt umgekehrt ; q) der Funktionalgleichung* (56), *$F_2(s;q)$ der Funktionalglei- g* (55).

Die Behauptungen dieses Lemmas lassen sich durch einfache Rechnung, ir dem Leser überlassen, verifizieren.

Offenbar sind $F_1(s;q)$ und $F_2(s;q)$ dann und nur dann Dirichletsche n der Gestalt (1), wenn q eine ganze Zahl ist.

2. Satz 11. *Es bezeichnen $A(s;k)$, $A'(s;k)$, $\mathsf{M}(s;k)$, $\mathsf{M}'(s;k)$ Dirichletschen Reihen* (40) *und* (50) *des vorigen Paragraphen; es chne ferner d einen beliebigen ganzzahligen Teiler von k (k und 1 ingeschlossen), so daß $k = qd$ wird.*

$$\frac{k}{d} = q = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_\mu^{\lambda_\mu}$$

ie Zerlegung von q in Primfaktoren. Endlich setze man

$$\begin{cases} P(s;p_\varrho,\lambda_\varrho,\nu_\varrho) = \left(1+\dfrac{\sqrt{p_\varrho}}{p_\varrho^s}\right)^{\lambda_\varrho-\nu_\varrho}\left(1-\dfrac{\sqrt{p_\varrho}}{p_\varrho^s}\right)^{\nu_\varrho} & (\nu_\varrho = 0,1,\dots,\lambda_\varrho) \\ Q(s;1)=1,\ Q(s;q)=P(s;p_1,\lambda_1,\nu_1)P(s;p_2,\lambda_2,\nu_2)\dots P(s;p_\mu,\lambda_\mu,\nu_\mu) \end{cases}$$

die ν_ϱ beliebige ganze Zahlen des Intervalls $0 \leqq \nu_\varrho \leqq \lambda_\varrho$ bedeuten. genügen die Funktionen

$$Q\left(s;\frac{k}{d}\right)A(s;d), \qquad Q\left(s;\frac{k}{d}\right)A'(s;d)$$

der Funktionalgleichung (I) *für* $\lambda = 1$ *oder* $\lambda = -1$, *die Funktionen*

$$Q\left(s, \frac{k}{d}\right) \mathsf{M}(s;d), \qquad Q\left(s; \frac{k}{d}\right) \mathsf{M}'(s;d) \tag{60}$$

der Funktionalgleichung (II) *für* $\lambda = 1$ *oder* $\lambda = -1$.

Außerdem lassen sich die Funktionen (59) *bzw.* (60) *für* $\sigma > 1$ *durch absolut konvergente Dirichletsche Reihen der Gestalt* (1) *darstellen.*

Beweis. Um die Schreibweise abzukürzen, bezeichnen wir mit $\mathrm{I}'(d)$ (bzw. $\mathrm{I}''(d)$) diejenige Funktionalgleichung, welche entsteht, wenn man in (I) k durch d und gleichzeitig λ durch 1 (bzw. λ durch -1) ersetzt. Dann genügt, wie im vorigen Paragraphen bewiesen wurde, $\Lambda(s;d)$ der Funktionalgleichung $\mathrm{I}'(d)$. Indem man nun das Lemma dieses Paragraphen mehrfach anwendet, schließt man, daß $\left(1+\frac{\sqrt{p_1}}{p_1^s}\right)\Lambda(s;d)$ der Funktionalgleichung $\mathrm{I}'(p_1 d)$, $\left(1+\frac{\sqrt{p_1}}{p_1^s}\right)^{\lambda_1-\nu_1}\Lambda(s;d)$ der Funktionalgleichung $\mathrm{I}'(p_1^{\lambda_1-\nu_1}$ genügt. Ebenso erkennt man, daß $P(s;p_1,\lambda_1,\nu_1)\Lambda(s;d)$ entweder der Funktionalgleichung $\mathrm{I}'(p_1^{\lambda_1} d)$ oder $\mathrm{I}''(p_1^{\lambda_1} d)$ genügt, je nachdem ν_1 gerade oder ungerade ist.

Indem wir dieses Verfahren fortsetzen, ergibt sich schließlich, daß die Funktion $Q\left(s;\frac{k}{d}\right)\Lambda(s;d)$ entweder der Funktionalgleichung $\mathrm{I}'(p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_\mu^{\lambda_\mu}$ $= \mathrm{I}'(q\,d) = \mathrm{I}'(k)$ oder der Funktionalgleichung $\mathrm{I}''(k)$ genügt, je nachdem $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\mu$ gerade oder ungerade ist.

In derselben Weise zeigt man, daß die übrigen Funktionen (59) (bzw. (60)) Lösungen von (I) (bzw. (II)) sind, die zum Eigenwerte $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ gehören.

Außerdem ist unmittelbar ersichtlich, daß die Funktionen (59) u. (60) Dirichletsche Reihen sind, denn die einzelnen Faktoren $P(s;p_\varrho,\lambda_\varrho,\nu_\varrho$ sind Dirichletsche Reihen, die nur aus endlich vielen Gliedern bestehen und somit werden die Produkte (59) und (60) wieder Dirichletsche Reihen, die für $\sigma > 1$ absolut konvergieren. Hiermit sind alle Behauptungen von Satz 11 bewiesen.

3. Im § 5 soll gezeigt werden, daß die Formeln (59) und (60) ganzen genau k voneinander verschiedene Funktionen liefern, wenn d alle Teiler von k (k und 1 mit eingeschlossen) und die ν_ϱ alle nach Formel (5 zulässigen Werte durchlaufen; in den §§ 6 und 7, daß diese k Funktionen voneinander linear unabhängig sind.

In Verbindung mit den Ergebnissen der ersten beiden Paragraphen insbesondere von Satz 10 folgt dann offenbar wegen $r_1 + r_2 + \varrho_1 + \varrho_2 =$

Satz 12. *Die Formeln* (59) *und* (60) *führen zu einem vollständigen m von k linear unabhängigen Funktionen, die die Bedingungen*), c) *erfüllen und einer der vier Funktionalgleichungen genügen, ntstehen, wenn man in* (I) *und in* (II) λ *einmal durch* 1, *das andre- durch* -1 *ersetzt.*

§ 5.

timmung der Anzahl der von einander verschiedenen Lösungen.

1. Im folgenden sollen die vier Typen Dirichletscher Reihen $d), \Lambda'(s; d), \mathsf{M}(s; d), \mathsf{M}'(s; d)$ nicht mehr voneinander unterschieden en, sondern jede Dirichletsche Reihe, die einer der vier Typen an- t, werde mit $\Lambda_\varkappa(s; d)$ bezeichnet.

Es lassen sich nunmehr aus den Reihen $L(s; d)$, deren Koeffizienten tliche Charaktere modulo d sind, ebensoviel Reihen $\Lambda_\varkappa(s; d)$ ableiten, voneinander verschiedene eigentliche Charaktere modulo d existieren. geschieht in folgender Weise: Es sei $2h_1(d)$ die Anzahl der voneinander hiedenen komplexen eigentlichen Charakteren modulo d, $h_2(d)$ die hl der voneinander verschiedenen reellen eigentlichen Charaktere ılo d. Durchläuft der Index $\varkappa$ die ganzzahligen Werte des Intervalls $d) + 1 \leqq \varkappa \leqq 2h_1(d) + h_2(d)$, so seien die Koeffizienten $\chi_\varkappa(n; d)$ der nörigen L-Reihe $L_\varkappa(s; d)$ reelle eigentliche Charaktere modulo d; egen seien für $1 \leqq \varkappa \leqq 2h_1(d)$ die $\chi_\varkappa(n; d)$ eigentliche komplexe aktere modulo d, und zwar sei die Numerierung der Charaktere so ıgeführt, daß die Größen $\chi_{2\varkappa-1}(n; d)$ und $\chi_{2\varkappa}(n; d)$ zueinander kon- rt komplex sind:

$$\chi_{2\varkappa}(n; d) = \bar{\chi}_{2\varkappa-1}(n; d).$$

Es werde ferner gesetzt für $1 \leqq \varkappa \leqq h_1(d)$

alle (I) $(\chi_{2\varkappa-1}(d-1; d) = 1)$:

$$\eta_\varkappa(d) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon(d)}};$$

alle (II) $(\chi_{2\varkappa-1}(d-1; d) = -1)$:

$$\eta_\varkappa(d) = \frac{1}{2\sqrt{-i\varepsilon(d)}}.$$

ergibt sich aus (42) bzw. (51), wenn $\bar{\eta}_\varkappa(d)$ die zu $\eta_\varkappa(d)$ konjugiert lexe Zahlen bedeutet,

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{2\varkappa-1}(s; d) &= \eta_\varkappa(d) L_{2\varkappa-1}(s; d) + \bar{\eta}_\varkappa(d) L_{2\varkappa}(s; d) \\ \Lambda_{2\varkappa}(s; d) &= \frac{1}{i}\left(\eta_\varkappa(d) L_{2\varkappa-1}(s; d) - \bar{\eta}_\varkappa(d) L(s; d)\right) \end{aligned}\right\} (1 \leqq \varkappa \leqq h_1(d)).$$

Für $2h_1(d)+1 \leqq \varkappa \leqq 2h_1(d)+h_2(d)$, wo die Koeffizienten von $L_\varkappa(s; d$ reell sind, ist

$$\Lambda_\varkappa(s; d) = L_\varkappa(s; d); \tag{62}$$

denn aus der Funktionalgleichung (43) bzw. (52) folgt wegen $|\varepsilon(k)| = 1$ daß, im Falle I, $\varepsilon(k) = \pm 1$, im Falle II, $-i\varepsilon(k) = \pm 1$ ist, es genüg demnach schon $L_\varkappa(s; d)$ einer der vier Funktionalgleichungen $\mathrm{I}'(d)$, $\mathrm{I}''(d)$ $\mathrm{II}'(d)$, $\mathrm{II}''(d)$. Die Formeln (61) und (62) liefern mithin genau $2h_1(d$ $+h_2(d)$ Reihen $\Lambda_\varkappa(s; d)$, die außerdem sämtlich voneinander verschiede sind, da die $2h_1(d)+h_2(d)$ Reihen $L_\varkappa(s; d)$ voneinander linear un abhängig sind.

Die Zahl $2h_1(d)+h_2(d)$ — das ist die Anzahl der voneinande verschiedenen eigentlichen Charaktere modulo d — werde mit $\psi(d)$ b zeichnet. Zu jedem d gehören demnach $\psi(d)$ verschiedene Dirichletsch Reihen $\Lambda_\varkappa(s; d)$ $(1 \leqq \varkappa \leqq \psi(d))$.

2. Es bezeichne $T\left(\frac{k}{d}\right)$ die Anzahl der voneinander verschiedenen Funk tionen $Q_\iota\left(s; \frac{k}{d}\right)$ der Formel (58) $\left(1 \leqq \iota \leqq T\left(\frac{k}{d}\right)\right)$. Da man sämtliche Funk tionen $Q_\iota\left(s; \frac{k}{d}\right)$ erhält, indem man in den einzelnen Faktoren $P(s; p_\varrho, \lambda_\varrho, \nu_\varrho$ den Exponenten ν_ϱ die ganzzahligen Werte von 0 bis λ_ϱ durchlaufen läßt, so is

$$T\left(\frac{k}{d}\right) = (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\ldots(\lambda_\mu+1), \tag{63}$$

mithin gleich der Anzahl der Teiler der Zahl $\frac{k}{d}$ (vgl. Formel (57)[10]).

Die in den Formeln (59) und (60) enthaltenen Funktionen lassen sich somit sämtlich in der Gestalt

$$f_\nu(s) = Q_\iota\left(s; \frac{k}{d}\right)\Lambda_\varkappa(s; d) \tag{64}$$

schreiben, wobei d alle Teiler von k durchläuft (k und 1 mit eingeschlossen) der Index ι alle ganzen Zahlen von 1 bis $T\left(\frac{k}{d}\right)$, der Index $\varkappa$ alle ganzen Zahlen von 1 bis $\psi(d)$. Demnach ist die Anzahl $A(k)$ der Funktion $f_\nu(s$

$$A(k) = \sum_{d \mid k} T\left(\frac{k}{d}\right)\psi(d)\,[11]. \tag{65}$$

3. Um die zahlentheoretischen Funktionen $\psi(d)$ näher zu bestimmen beachte man, daß außer den $\psi(k) = 2h_1(k)+h_2(k)$ eigentlichen Charak

[10]) Vgl. etwa Dirichlet, l. c. Anm. [4]) S. 17.

[11]) Die Symbole $\sum_{d \mid k}$ bzw. $\sum_{d' \mid q}$ usw. bedeuten, daß die Summation über alle Teile d von k (1 und k mit eingeschlossen) bzw. über alle Teiler d' von q zu erstrecken ist

n modulo k auch noch eine Anzahl uneigentlicher Charaktere $\chi_\varkappa(n; k)$
e sei mit $h_3(k)$ bezeichnet $-$ $(\psi(k)+1 \leqq \varkappa \leqq \psi(k)+h_3(k))$ existieren,
ß die Gesamtzahl $h(k)$ aller Charaktere gleich $2h_1(k)+h_2(k)+h_3(k)$
Auch diese $h(k)$ zahlentheoretischen Funktionen $\chi_\varkappa(n; k)$ sind von-
nder linear unabhängig, und zwar ist $h(k)$ gleich der Anzahl $\varphi(k)$ der
teilerfremden Restklassen, unter $\varphi(k)$ die bekannte Eulersche Funktion
tanden[12]).

Die uneigentlichen Charaktere modulo k stehen nun aber mit den
ntlichen Charakteren modulo d $(d \neq k)$ in einem engen Zusammenhang.
nämlich $\chi_\varkappa(n; d)$ ein eigentlicher Charakter modulo d, so erhält man
n uneigentlichen Charakter $\chi_\iota(n; k)$ modulo k, indem man setzt[13])

$$\begin{cases} \chi_\iota(n; k) = \chi_\varkappa(n; d), & \text{wenn } (n, k) = 1^{14}), \\ \chi_\iota(n; k) = 0, & \text{wenn } (n, k) > 1. \end{cases}$$

pielsweise entspricht dem Charakter modulo 1, $\chi(n; 1) = 1$, der soge-
nte Hauptcharakter modulo k.

Ist umgekehrt $\chi_\iota(n; k)$ ein uneigentlicher Charakter modulo k, so
sich auf eine und nur eine Weise ein Teiler $d \neq k$ von k und ein eigent-
er Charakter $\chi_\varkappa(n; d)$ modulo d derart bestimmen, daß[15])

$$\begin{aligned} &\chi_\varkappa(n, d) = \chi_\iota(n; k) = 0 && (n, d) > 1, \\ &\chi_\varkappa(n; d) = \chi_\iota(n; k) && (n, k) = 1, \\ &\chi_\varkappa(n; d) = \chi_\iota(n'; k) && (n, k) > 1,\ (n, d) = 1, \end{aligned}$$

er n' eine Zahl verstanden, die den beiden Bedingungen

$$n' \equiv n \pmod{d}, \quad (n', k) = 1$$

igt.

Da sich mithin jeder eigentliche Charakter $\chi_\varkappa(n; d)$, wenn $d < k$,
m uneigentlichen Charakter $\chi_\iota(n; k)$ umkehrbar eindeutig zuordnen läßt,
olgt

$$\sum_{d<k} \psi(d) = h_3(k),$$

indem man auf beiden Seiten $\psi(k) = 2h_1(k) + h_2(k)$ addiert,

$$\sum_{d \mid k} \psi(d) = \varphi(k).$$

---

[12]) Vgl. Landau, Handb. 1, S. 401–404 u. S. 409–411.
[13]) Vgl. Landau, Handb. 1, S. 478–483.
[14]) Unter (n, k) werde der größte gemeinsame Teiler von n und k verstanden.
[15]) l. c. Anm. [13]).

4. Die Beziehungen (65) und (67) führen nun aber zu einem Teil der Behauptung des Satzes 12:

$$A(k) = k, \tag{68}$$

die wir nunmehr beweisen wollen.

Man setze

$$\Psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^s}, \qquad \Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}.$$

Dann folgt aus (67)

$$\Psi(s)\zeta(s) = \Phi(s), \tag{69}$$

wovon man sich unmittelbar überzeugt, indem man die Dirichletschen Reihen linker Hand formal miteinander multipliziert.

Bekanntlich ist ferner

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n)}{n^s}\text{)}^{16};$$

mithin ergibt Formel (65)

$$\zeta^2(s)\,\Psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)}{n^s}. \tag{70}$$

Andererseits ist aber wegen (69) und mit Rücksicht auf die elementare Eulersche Relation $\sum_{d|k} \varphi(d) = k$ [17])

$$\zeta^2(s)\,\Psi(s) = \zeta(s)\,\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s}.$$

Indem man diese Reihe mit (70) vergleicht, erschließt man unmittelbar die behauptete Formel (68).

§ 6.

Die lineare Unabhängigkeit der k Lösungen; vorbereitende Betrachtungen.

1. Nachdem wir gezeigt haben, daß k voneinander verschiedene Funktionen (64) existieren, bleibt uns nur noch übrig zu beweisen, daß diese k Funktionen auch linear unabhängig sind. Diesem Beweise schicken wir mehrere Hilfssätze voraus.

---

[16]) Diese Formel läßt sich wegen $T(n) = \sum_{d|n} 1$ durch formale Multiplikationen von $\zeta(s)$ mit sich selbst leicht verifizieren.

[17]) Vgl. etwa Dirichlet, l. c. Anm. [4]) S. 24—26.

Lemma II. *Die* $\lambda+1$ *Funktionen*

$$P(s;\, p, \lambda, \nu) = \left(1+\frac{\sqrt{p}}{p^s}\right)^{\lambda-\nu}\left(1-\frac{\sqrt{p}}{p^s}\right)^{\nu} \qquad (0\leqq\nu<\lambda)$$

nd voneinander linear unabhängig.

Beweis. Man setze

$$u = \frac{1-\frac{\sqrt{p}}{p^s}}{1+\frac{\sqrt{p}}{p^s}} = \frac{p^s-\sqrt{p}}{p^s+\sqrt{p}};$$

nn nimmt u alle Werte von -1 bis $+1$ an, wenn s von $-\infty$ bis ∞ wächst. Würde nun zwischen den $P(s;\, p, \lambda, \nu)$ bei geeigneter Wahl n Koeffizienten c_ν eine lineare Relation

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda} c_\nu P(s;\, p, \lambda, \nu) = 0$$

stehen, so würde aus dieser Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda} c_\nu u^\nu = 0$$

gen, und zwar identisch für alle Werte von u im Intervall $-1 \leqq u \leqq +1$. es ist aber nur möglich, wenn alle Konstanten c_ν verschwinden. W.z.b.w.

2. Lemma III. *Es sei wieder*

$$q = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_\mu^{\lambda_\mu} \qquad (7)$$

e Zerlegung von q *in Primfaktoren. Dann sind die* $T(q)$ *Funktionen* $(s;\, q)$, *die man erhält, wenn man die* ν_ϱ *alle ganzen Zahlen zwischen* 0 *d* λ_ϱ *durchlaufen läßt (vgl. Formel* (58) *aus Satz* 11), *voneinander ear unabhängig.*

Beweis. Wir setzen voraus, der Satz sei bereits bewiesen, wenn q e in (57) höchstens μ verschiedene Primzahlen (außer 1) als Teiler ent- lt, und wir wollen zeigen, daß unter dieser Annahme der Satz auch r die $T(q')$ verschiedenen Funktonen $Q_\varkappa(s;\, q')$ richtig ist, wenn

$$q' = q\, p_{\mu+1}^{\lambda_{\mu+1}} \qquad (p_{\mu+1} \neq p_\varrho,\ 1 \leqq \varrho \leqq \mu$$

setzt wird. Da in Lemma II der Satz bereits für den Fall $\mu = 1$ be- esen ist, so ist er durch diesen Schluß von μ auf $\mu+1$ für alle μ wiesen.

Es seien $T(q')$ Konstanten $c_\varkappa$ so bestimmt, daß

$$\sum_{\varkappa=1}^{T(q')} c_\varkappa Q_\varkappa(s;\, q') = 0 \qquad (1)$$

ist. Dann haben wir zu zeigen, daß aus (71)

$$c_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, T(q'))$$

folgt.

Ersetzt man $Q_\varkappa(s; q')$ durch das Produkt $Q_\iota(s; q)\, P(s; p_{\mu+1}, \lambda_{\mu+1}, \nu)$, so läßt sich (71) in der Form schreiben

$$\sum_{\iota=1}^{T(q)} \sum_{\nu=0}^{\lambda_{\mu+1}} c_{\iota\nu} Q_\iota(s; q) P(s; p_{\mu+1}, \lambda_{\mu+1}, \nu) = 0, \tag{72}$$

wobei jede der $(\lambda_{\mu+1}+1)\,T(q) = T(q')$ Konstanten $c_{\iota\nu}$ (vgl. Formel (63)) gleich einer der Konstanten $c_\varkappa$ ist.

$P(s; p_{\mu+1}, \lambda_{\mu+1}, \nu)$ ist aber eine Dirichletsche Reihe aus endlich vielen Gliedern der Gestalt

$$P(s; p_{\mu+1}, \lambda_{\mu+1}, \nu) = \sum_{\varrho=0}^{\lambda_{\mu+1}} \frac{\alpha_{\nu\varrho}}{p_{\mu+1}^{\varrho s}}. \tag{73}$$

Setzt man

$$\beta_{\iota\varrho} = \sum_{\nu=0}^{\lambda_{\mu+1}} c_{\iota\nu}\, \alpha_{\nu\varrho}, \tag{74}$$

so ergibt sich aus (72)

$$\sum_{\varrho=0}^{\lambda_{\mu+1}} \left(\sum_{\iota=0}^{T(q)} \beta_{\iota\varrho} Q_\iota(s; q) \right) p_{\mu+1}^{-\varrho s} = 0. \tag{75}$$

In der Doppelsumme linker Hand sind aber die Koeffizienten von $p_{\mu+1}^{-\varrho s}$ selbst wieder Dirichletsche Reihen, und zwar folgt aus der Definition (58) für die $Q_\iota(s; q)$

$$\sum_{\iota=1}^{T(q)} \beta_{\iota\varrho} Q_\iota(s; q) = \sum_{d \mid q} \frac{\gamma_{\varrho d}}{d^s} \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots, \lambda_{\mu+1}). \tag{76}$$

Dies in (75) eingesetzt, ergibt

$$\sum_{\varrho=0}^{\lambda_{\mu+1}} \sum_{d \mid q} \frac{\gamma_{\varrho d}}{(d\, p_{\mu+1}^{\varrho})^s} = 0,$$

und diese Summe kann offenbar nur verschwinden, wenn alle $\gamma_{\varrho d} = 0$ sind, denn wegen $(d, p_{\mu+1}^{\varrho}) = 1$ gehören $\gamma_{\varrho d}$ und $\gamma_{\varrho' d'}$ zu verschiedenen Gliedern der Dirichletschen Reihe als Koeffizienten, außer wenn $\varrho = \varrho'$, $d = d'$ ist.

Aus (76) folgt nunmehr wegen $\gamma_{\varrho d} = 0$ (für alle ϱ und alle d)

$$\sum_{\iota=1}^{T(q)} \beta_{\iota\varrho} Q_\iota(s; q) = 0.$$

Nun können aber diese Beziehungen, da wir unsere Behauptung für ein q,

s nur μ verschiedene Primzahlen als Faktoren enthält, als bereits be-esen vorausgesetzt haben, nur bestehen, wenn die $\beta_{\iota\varrho}$ für alle ι und ϱ rschwinden. Mithin ergibt sich aus (74)

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda_{\mu}+1} c_{\iota\nu}\,\alpha_{\nu\varrho} = 0 \qquad \begin{pmatrix}\varrho = 0, 1, \ldots, \lambda_{\mu}+1\\ \iota = 1, 2, \ldots, T(\varrho)\end{pmatrix}$$

d in Verbindung mit (73)

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda_{\mu}+1} c_{\iota\nu}\,P(s;\, p_{\mu+1}, \lambda_{\mu+1}, \nu) = 0 \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, T(\varrho)).$$

Da aber die $\lambda_{\mu+1}+1$ Dirichletschen Reihen (73) nach Lemma II neinander linear unabhängig sind, so können diese Relationen nur erfüllt in, wenn alle $c_{\iota\nu} = 0$ sind; und somit sind auch die Koeffizienten $c_{\varkappa}$ aus 1), die mit den $c_{\iota\nu}$ übereinstimmen, sämtlich gleich Null. W. z. b. w.

3. Es bezeichne $R_{\varkappa}(s; q)$ eine Dirichletsche Reihe der Gestalt

7) $$R_{\varkappa}(s; q) = \sum_{l \mid q} \frac{x_{\varkappa}(l; q)}{l^{s}}$$

l alle Teiler von q durchläuft (1 und q mit eingeschlossen), und die $(l; q)$ beliebige Konstanten bedeuten. Dann behaupten wir:

Lemma IV. *Die Beziehung*

$$\sum_{d \mid k} \sum_{\varkappa=1}^{\psi(d)} R_{\varkappa}\left(s; \frac{k}{d}\right) L_{\varkappa}(s; d) = 0$$

nn nur bestehen, wenn alle Koeffizienten $x_{\varkappa}\left(l; \frac{k}{d}\right)$ *der Reihen* $R_{\varkappa}\left(s; \frac{k}{d}\right)$ *entisch verschwinden.*

Bevor wir im folgenden Paragraphen den Beweis dieses Lemmas bringen, soll hier zunächst aus Lemma IV gefolgert werden, daß die k Funk-nen (64) voneinander linear unabhängig sind.

Es seien die k Konstanten $c_{\varkappa\iota}(d)$ derart bestimmt, daß

8) $$\sum_{d \mid k} \sum_{\varkappa=1}^{\psi(d)} \sum_{\iota=1}^{T\left(\frac{k}{d}\right)} c_{\varkappa\iota}(d)\, Q_{\iota}\left(s; \frac{k}{d}\right) A_{\varkappa}(s; d) = 0$$

. Dann ist zu zeigen, daß die k Konstanten $c_{\varkappa\iota}(d)$ notwendig alle ver-nwinden.

Indem wir die in § 5 Abschnitt 1 eingeführten Größen $h_1(d)$ und $h_2(d)$ nutzen (es war $\psi(d) = 2h_1(d) + h_2(d)$), zerlegen wir die Summe (78)

$$\sum_{d|k}\left(\sum_{\varkappa=1}^{h_1(d)}\sum_{\iota=1}^{T\left(\frac{k}{d}\right)} Q_\iota\left(s;\frac{k}{d}\right)\left[c_{2\varkappa-1,\iota}(d)\,\Lambda_{2\varkappa-1}(s;d)+c_{2\varkappa,\iota}(d)\,\Lambda_{2\varkappa}(s;d)\right]\right.$$
$$\left.+\sum_{\varkappa=2h_1(d)+1}^{h_2(d)}\sum_{\iota=1}^{T\left(\frac{k}{d}\right)} c_{\varkappa\iota}(d)\,Q_\iota\left(s;\frac{k}{d}\right)\Lambda_\varkappa(s;d)\right)=0.$$

Setzt man für die $\Lambda_\varkappa(s;d)$ ihre Werte aus (61) und (62) ein, so ergibt sich

$$\sum_{d|k}\left\{\sum_{\varkappa=1}^{h_1(d)}\sum_{\iota=1}^{T\left(\frac{k}{d}\right)}\left[Q_\iota\left(s;\frac{k}{d}\right)\left(c_{2\varkappa-1,\iota}(d)\,\eta_\varkappa(d)+c_{2\varkappa,\iota}(d)\frac{\eta_\varkappa(d)}{i}\right)L_{2\varkappa-1}(s;d)\right.\right.$$
$$\left.+Q_\iota\left(s;\frac{k}{d}\right)\left(c_{2\varkappa-1,\iota}(d)\,\overline{\eta}_\varkappa(d)-c_{2\varkappa,\iota}(d)\frac{\overline{\eta}_\varkappa(d)}{i}\right)L_{2\varkappa}(s;d)\right]$$
$$\left.+\sum_{\varkappa=2h_1(d)+1}^{\psi(d)}\sum_{\iota=1}^{T\left(\frac{k}{d}\right)} c_{\varkappa\iota}(d)\,Q_\iota\left(s;\frac{k}{d}\right)L_\varkappa(s;d)\right\}=0.$$

Die in dieser Beziehung auftretendenden Koeffizienten der $L_\varkappa(s;d)$ sind aber offenbar Dirichletsche Reihen vom Typus $R_\varkappa\left(s;\frac{k}{d}\right)$ der Formel (77) (vgl. Formel (58) und (76)); mithin folgt aus Lemma IV

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\iota=1}^{T\left(\frac{k}{d}\right)}\left(c_{2\varkappa-1,\iota}(d)\,\eta_\varkappa(d)+c_{2\varkappa,\iota}(d)\frac{\eta_\varkappa(d)}{i}\right)Q_\iota\left(s;\frac{k}{d}\right)=0\\&\sum_{\iota=1}^{T\left(\frac{k}{d}\right)}\left(c_{2\varkappa-1,\iota}(d)\,\overline{\eta}_\varkappa(d)-c_{2\varkappa,\iota}(d)\frac{\overline{\eta}_\varkappa(d)}{i}\right)Q_\iota\left(s;\frac{k}{d}\right)=0\end{aligned}\right\}\quad(\varkappa=1,2,\ldots,h_1(d)),$$

$$\sum_{\iota=1}^{T\left(\frac{k}{d}\right)} c_{\varkappa\iota}(d)\,Q_\iota\left(s;\frac{k}{d}\right)=0\qquad(2h_1(d)+1\leqq\varkappa\leqq\psi(d))$$

und weiter aus Lemma III

$$(79)\qquad\left\{\begin{aligned}&c_{2\varkappa-1,\iota}(d)\,\eta_\varkappa(d)+c_{2\varkappa,\iota}(d)\frac{\eta_\varkappa(d)}{i}=0\\&c_{2\varkappa-1,\iota}(d)\,\overline{\eta}_\varkappa(d)-c_{2\varkappa,\iota}(d)\frac{\overline{\eta}_\varkappa(d)}{i}=0\end{aligned}\right\}\begin{pmatrix}1\leqq\iota\leqq T\left(\frac{k}{d}\right)\\1\leqq\varkappa\leqq h_1(d)\end{pmatrix},$$

$$(80)\qquad c_{\varkappa\iota}(d)=0\qquad\left(2h_1(d)+1\leqq\varkappa\leqq\psi(d),\ 1\leqq\iota\leqq T\left(\frac{k}{d}\right)\right).$$

Da aber die Determinante der homogenen Gleichungen (79) $=-\frac{2}{i}\eta_\varkappa(d)\,\overline{\eta}_\varkappa(d)\neq 0$ ist für alle $\varkappa$ und d (wegen $|\eta_\varkappa(d)|=\frac{1}{2}$), so er-

bt sich aus (79) in Verbindung mit (80), daß sämtliche Konstanten $_{\iota}(d) = 0$ sind. W. z. b. w.

§ 7.

Fortsetzung von § 6; Beweis von Lemma IV.

1. Es bleibt nur noch übrig das Lemma IV zu beweisen; in ihm t, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, der wesentliche Teil der ehauptung des Satzes 12 formuliert, daß die k Lösungen (64) voneinander near unabhängig sind.

Wir betrachten die Koeffizienten $x_\varkappa\left(l; \frac{k}{d}\right)$ der Dirichletschen Reihen $_\varkappa\left(s; \frac{k}{d}\right)$ (vgl. Formel (77)) zunächst als Veränderliche und bilden die irichletsche Reihe

$$F(s) = \sum_{d \mid k} \sum_{\varkappa=1}^{\psi(d)} R_\varkappa\left(s; \frac{k}{d}\right) L_\varkappa(s; d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{n^s},$$

ann hängen die Koeffizienten $a_n(x)$ der Reihe $F(s)$ von den $x_\varkappa\left(l; \frac{k}{d}\right)$ b, und zwar ist

$$a_n(x) = \sum_{d \mid k} \sum_{\varkappa=1}^{\psi(d)} \sum_{\substack{l \mid n \\ l \mid \frac{k}{d}}} x_\varkappa\left(l; \frac{k}{d}\right) \chi_\varkappa\left(\frac{n}{l}; d\right), \tag{81}$$

wobei somit l gleichzeitig Teiler von n und $\frac{k}{d}$ ist).

Die Behauptung von Lemma IV läßt sich nunmehr so formulieren:

die Koffizienten $a_n(x)$ sind nur dann sämtlich gleich Null, wenn auch die $x_\varkappa\left(l; \frac{k}{d}\right)$ sämtlich verschwinden.

Beim Beweise dieser Behauptung wird als wesentlich die bekannte igenschaft der Charaktere benutzt, daß die $\varphi(k)$ zahlentheoretischen unktionen $\chi_\varkappa(n; k)$ (das ist also die Gesamtheit der eigentlichen und un-igentlichen Charaktere modulo k) voneinander linear unabhängig sind.

2. Es sei $(n, k) = 1$. Dann ist offenbar wegen (81)

$$a_n(x) = \sum_{d \mid k} \sum_{\varkappa=1}^{\psi(d)} x_\varkappa\left(1; \frac{k}{d}\right) \chi_\varkappa(n; d).$$

Nun folgt aber wegen $(n, k) = 1$ aus den Formeln (66), die den usammenhang der eigentlichen Charakteren modulo d mit den uneigent-chen Charakteren modulo k angeben,

$$\chi_\varkappa(n; d) = \chi_\iota(n; k) \neq 0,$$

mithin ergibt sich, wenn man entsprechend den Koeffizienten $x_\varkappa\left(1;\frac{k}{d}\right)$ von $\chi_\varkappa(n;d)$ mit y_ι bezeichnet,

$$a_n(x)=\sum_{\iota=1}^{\varphi(k)} y_\iota \chi_\iota(n;k), \qquad ((n,k)=1),$$

wobei in der Summe rechter Hand alle voneinander verschiedenen (eigentliche und uneigentliche) Charaktere modulo k vorkommen. Aus dieser Beziehung erkennt man aber unmittelbar, daß die $a_n(x)$ nur dann verschwinden, wenn sämtliche $x_\varkappa\left(1;\frac{k}{d}\right)=y_\iota=0$ sind.

3. Wir setzen nunmehr voraus, es sei für ein festes m bereits bewiesen, daß, im Falle $a_n(x)=0$ für alle n, sämtliche Koeffizienten $x_\varkappa\left(l;\frac{k}{d}\right)=0$ sind, wenn die Zahl l gleich einem Produkt von höchstens m Primfaktoren ist $(l=p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\dots p_\mu^{\nu_\mu},\ \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_\mu=m)$, und es soll nunmehr gezeigt werden, daß auch alle $x_\varkappa\left(q;\frac{k}{d}\right)$ verschwinden; hierbei sei q eine feste Zahl (offenbar ein Teiler von $\frac{k}{d}$ wegen (77)), die gleich einem Produkte von $m+1$ Primfaktoren ist.

Wir betrachten alle Koeffizienten $a_n(x)$, deren Index n der Beziehung $(n,k)=q$ genügt. Wir behaupten, daß unter den gemachten Voraussetzungen die Summe (81), die den Koeffizienten $a_n(x)$ darstellt, nur solche Glieder enthält, in denen $l=q$ ist, mithin:

$$a_n(x)=\sum_{d\mid k}\sum_{\varkappa=1}^{\psi(d)} x_\varkappa\left(q;\frac{k}{d}\right)\chi_\varkappa\left(\frac{n}{q};d\right) \qquad ((n,k)=q), \tag{82}$$

und in der Tat: da l ein gemeinsamer Teiler von n und $\frac{k}{d}$ ist, so muß l um so mehr ein Teiler von $(n,k)=q$ sein. Ist aber $l\neq q$ ein echter Teiler von q, so setzt sich l aus höchstens m Primfaktoren zusammen, mithin ist nach den gemachten Voraussetzungen $x_\varkappa\left(l;\frac{k}{d}\right)=0$. Damit ist Formel (82) bewiesen.

Die Koeffizienten $x_\varkappa\left(q;\frac{k}{d}\right)$ existieren nun aber (vgl. Formel (77)) nur dann für einen Teiler d von k, wenn q ein Teiler von $\frac{k}{d}$, oder, was dasselbe bedeutet, wenn d ein Teiler von $\frac{k}{q}$ ist; mithin läßt sich Formel (82) auch so schreiben:

$$a_n(x)=\sum_{d\mid\frac{k}{q}}\sum_{\varkappa=1}^{\psi(d)} x_\varkappa\left(q;\frac{k}{d}\right)\chi_\varkappa\left(\frac{n}{q};d\right) \qquad ((n,k)=q). \tag{83}$$

Andererseits existiert, wenn $d < \frac{k}{q}$ ist, zu jedem eigentlichen Charakter $\chi_\varkappa\left(\frac{n}{q}; d\right)$ ein uneigentlicher Charakter modulo $\frac{k}{q}$, derart, daß nach Formel (66) wegen $\left(\frac{n}{q}, \frac{k}{q}\right) = 1$

$$\chi_\varkappa\left(\frac{n}{q}; d\right) = \chi_\iota\left(\frac{n}{q}; \frac{k}{q}\right) \neq 0$$

ist; und setzt man entsprechend wieder

$$x_\varkappa\left(q; \frac{k}{d}\right) = y_\iota,$$

so ergibt sich aus (83) wegen $\sum_{d \mid \frac{k}{q}} \psi(d) = \varphi\left(\frac{k}{q}\right)$ (vgl. Formel (67))

$$a_n(x) = \sum_{\iota=1}^{\varphi\left(\frac{k}{q}\right)} y_\iota \chi_\iota\left(\frac{n}{q}; \frac{k}{q}\right). \qquad ((n, k) = q) \tag{84}$$

Da aber die $\varphi\left(\frac{k}{q}\right)$ zahlentheoretischen Funktionen $\chi_\iota\left(\frac{n}{q}; \frac{k}{q}\right)$ voneinander linear unabhängig sind, so folgt daraus, daß $a_n(x)$ nur dann den Wert 0 annimmt, wenn alle $x_\varkappa\left(q; \frac{k}{d}\right) = y_\iota$ verschwinden.

Damit ist aber das Lemma IV in vollem Umfange bewiesen. Denn nachdem im Abschnitt 1 aus $a_n(x) = 0$ (für $(n, k) = 1$) $x_\varkappa\left(1; \frac{k}{d}\right) = 0$ für alle $\varkappa$ und alle d gefolgert wurde, schließt man nun nacheinander aus $a_n(x) = 0$ (für $(n, k) = q$) $x_\varkappa\left(q; \frac{k}{d}\right) = 0$ zunächst für solche Teiler q von k, die gleich einer Primzahl sind, dann für alle Teiler q von k, die gleich dem Produkte zweier Primzahlen sind, und so fort, indem man zuletzt aus $a_n(x) = 0$ (für $(n, k) = k$) $x_\varkappa(k; k) = 0$ folgert.

(Eingegangen am 18. April 1921.)

Mathematische Preisaufgabe
der
Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft.

Der Gaußsche Algorithmus des „arithmetisch-geometrischen Mittels" kann dahin verallgemeinert werden, daß an Stelle der beiden Mittelbildungen irgend zwei Funktionen φ und ψ von zwei Veränderlichen treten. Man kommt auf diese Weise, ausgehend von zwei beliebigen Zahlwerten x und y, auf zwei unendliche Folgen

$$x,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$
$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,$$

welche durch die rekurrenten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \varphi(x_{n-1},\ y_{n-1}) \\ y_n &= \psi(x_{n-1},\ y_{n-1}) \end{aligned}\right\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

beherrscht sind. Im allgemeinen werden dann keine Grenzwerte jener Folgen existieren, während doch die Folgen selbst besondere Eigenschaften besitzen können.

Die Gesellschaft wünscht:

Die Untersuchung der genannten Folgen für irgendwelche einfache Funktionen $\varphi(x, y)$, und $\psi(x, y)$, wobei namentlich auch eine independente Darstellung der rekurrent definierten Glieder der Reihen ins Auge zu fassen wäre.

Einlieferung bis zum 31. Oktober 1924; Preis 3000 Mark.